Sobre as Hipóteses nas quais a Geometria se Fundamenta[α]

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Plano da Investigação

Sabe-se que a geometria assume tanto o conceito de espaço, como os princípios fundamentais para construir no espaço, como algo previamente adquirido. Ela dá deles apenas definições nominais, ao passo que as determinações fundamentais aparecem sob a forma de axiomas. A relação destes pressupostos permanece portanto na obscuridade; nós não vemos nem se, ou em que medida, a sua ligação é necessária, nem *a priori*, ou se é possível.

De Euclides a Legendre, para nomear os mais famosos geómetras reformadores modernos, esta obscuridade nunca foi esclarecida nem pelos matemáticos, nem pelos filósofos que se ocuparam dela. A razão disso é provavelmente devida ao conceito geral de grandezas de múltipla extensão, dentro do qual estão incluídas as grandezas espaciais, que não foi de todo trabalhado. Por isso, atribuí-me primeiramente a tarefa de construir o conceito de grandeza <*Grössenbegriff*> de múltipla extensão dentro dos conceitos gerais de grandeza. Resulta daí que uma grandeza de múltipla extensão é passível de diferentes relações métricas <*Massverhältnisse*>[1], e que portanto o espaço[2] apenas constitui um caso particular de uma grandeza de tripla extensão. Mas então é necessariamente

[α] Esta Dissertação foi lida pelo autor a 10 de Junho de 1854, e promovida pelo colóquio realizado a propósito da atribuição do grau de Professor na Faculdade de Filosofia de Göttingen. Aqui é explicitada a forma de representação na qual a investigação analítica pode então ganhar sentido; alguns desses resultados [dessas investigações analíticas] encontram-se na resposta [de Riemann] à Academia de Paris [*Preischrift*], nas considerações a eles feitas.

[1] Conceito de tradução difícil numa formulação tão compacta como a que Riemann usa; optou-se por *relações-métricas* (tal como Michael Spivak traduz) em vez de *relações de medida* ou simplesmente *relações-medida* (como William Clifford), sendo que o sentido deve ater-se ao conjunto de relações entre elementos que pode servir de base a uma medição. (N. T.)

[2] O espaço a que Riemann aqui se refere é aquele que é pressuposto pela geometria euclidiana. (N. T.)

consequente que as proposições da geometria não podem ser derivadas de noções gerais de grandeza, mas sim que essas propriedades, através das quais se distingue o espaço de outras grandezas de tripla extensão concebíveis, apenas podem ser retiradas da experiência. Como tal, impõe-se a tarefa de descobrir os mais simples factos <*Thatsachen*> a partir dos quais as relações métricas do espaço se deixam determinar – uma tarefa que, pela natureza do assunto, não está inteiramente determinada; pois talvez haja vários sistemas de factos, os quais são suficientes para determinar as relações métricas do espaço; sendo o mais importante para o presente fim aquele que Euclides deixou como fundamento. Estes factos, tal como todos os factos, não são necessários, mas apenas de certeza empírica, eles são hipóteses; pode-se então investigar a sua probabilidade, a qual dentro dos limites da observação é certamente muito grande, e inquirir sobre a admissibilidade da sua extensão para lá dos limites da observação, tanto pelo lado do desmedidamente[3] grande como pelo lado do desmedidamente pequeno.

I. Conceito de uma grandeza extensiva a *n*-dimensões

Procedendo eu então, antes de mais, na tentativa de encontrar solução para a primeira destas tarefas, o desenvolvimento do conceito de grandeza de múltipla extensão, parece-me que no mínimo posso reclamar alguma indulgência nos juízos críticos, na medida em que sou pouco versado nestes trabalhos de natureza filosófica, onde as dificuldades residem mais nos próprios conceitos do que na construção, e que, para além de umas poucas e breves pistas dadas pelo ilustríssimo Sr. Gauss[4] na sua segunda dissertação sobre resto biquadrático no *Göttingen Gelehrte Anzeige*[5], e na sua Dissertação de Jubileu, e de algumas investigações filosóficas de Herbart, não pude fazer uso de nenhuns trabalhos anteriores.

---

[3] O termo usado por Riemann é <*Unmessbar*>, *desmedido*, ou seja, aquilo que não é passível de ser mensurado pela dificuldade em atingir o limite do que se deseja medir. Clifford, não se detém nesta subtileza do pensamento de Riemann (naquela que é, a nosso ver, uma das poucas objecções que se pode fazer à sua magnífica tradução) e verte <*Unmessbar*> por <*infinite*>, *infinito*, o que, além de conotar a expressão do autor com um conceito matematicamente complexo (o de infinito), vai também contra o espírito das abundantes considerações métricas de Riemann e até, em certa medida, contradiz a ideia da última secção desta dissertação. Riemann não afirma que o grande ou o pequeno têm uma grandeza infinita – no sentido em que não conhece termo –, afirma sim que a nós humanos não é dado *medir* essa grandeza, por falta de instrumentos e por incapacidade racional de a conceber até ao limite; a determinação é de ordem *relacional* e não *ontológica*. Spivak também prefere a tradução do termo por <*immeasurable*>. (N. T.)

[4] No original, Riemann refere um dos muitos títulos honoríficos concedidos a Gauss em vida, o de *Geheimen Hofrath*, que omitimos, pois para ele não existe propriamente um grau equivalente em português (o mais aproximado seria, por exemplo, o de *Conselheiro de Estado*). (N.T.)

[5] C. F. Gauss, *Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio secunda*, Göttingen, 1832. (N. T.)

1.

Conceitos de grandeza são apenas possíveis onde se encontra um conceito geral antecedente, o qual permite diferentes determinações específicas. Conforme existe, ou não existe, entre estas determinações específicas uma passagem contínua de uma para outra, elas formam uma variedade contínua ou discreta; as determinações específicas individuais denominam-se no primeiro caso pontos e no segundo elementos desta variedade. Conceitos cujas determinações específicas formam uma variedade discreta são tão frequentes que, dados quaisquer objectos, é sempre possível encontrar nas línguas cultivadas pelo menos um conceito no qual elas estão contidas (e os matemáticos podem por isso, com segurança, extrair da teoria das grandezas discretas o postulado de que certos objectos dados são considerados equivalentes), por outro lado, as ocasiões para formar conceitos cujas determinações específicas constituem uma variedade contínua são tão escassas na vida quotidiana, que é bem possível que as posições dos objectos percepcionados <*Sinnengegenstände*> e as cores sejam os únicos conceitos simples cujas determinações específicas formam uma variedade de múltipla extensão. Encontram-se na matemática avançada ocasiões mais frequentes para a criação e desenvolvimento destes conceitos.

Determinações, através das quais se distingue uma região de uma variedade por uma característica ou por um limite, são chamadas Quanta. A comparação da sua quantidade <*Quantität*> é obtida pela enumeração no caso das grandezas discretas, pela medição no caso das contínuas. A medição consiste na sobreposição das grandezas a comparar; para a medição é preciso então um recurso que consiste no uso de uma grandeza como escala para medir a outra. Faltando isto, só se podem comparar duas grandezas quando uma é parte da outra, e aí apenas o mais ou o menos, mas não decidir sobre o quanto. As investigações, que neste caso se podem empreender sobre elas [as grandezas], configuram uma divisão geral autónoma da teoria da grandeza, na qual as grandezas são consideradas, não como existindo independentemente da posição, e não como sendo exprimíveis através de uma unidade, mas como regiões numa variedade. Tais investigações tornaram-se uma necessidade para muitas áreas da matemática nomeadamente para o tratamento de funções analíticas multi-valoradas, e a sua carência é sem dúvida a causa principal de o famoso teorema de Abel e as conquistas de Lagrange, Pfaff, e de Jacobi para a teoria geral das equações diferenciais, permanecerem há tanto tempo infrutíferas. Para o presente propósito, esta secção geral da teoria da grandeza extensa, na qual nada é assumido senão aquilo que está contido no seu conceito, é suficiente destacar dois pontos, dos quais o primeiro se relaciona com a construção do conceito de variedade de múltipla extensão, o segundo com a redução das determinações da posição <*Ortsbestimmung*> numa variedade dada às determinações quantitativas <*Quantitätsbestimmung*>[6], e tornará clara a verdadeira característica <*Kennzeichen*> de uma extensão a *n*-dimensões.

2.

Se se passar, através de um conceito dado cujas determinações específicas <*Bestimmungweise*> formam uma variedade contínua, de uma determinação específica para uma outra, então as determinações específicas transpostas formam uma variedade de extensão simples, cuja característica essencial é a de que a progressão contínua de um ponto é possível apenas para dois lados, para a frente ou para trás. Suponha-se agora que esta variedade transita por sua vez para uma outra completamente diferente, e com efeito outra vez de um modo determinado, designadamente, que cada ponto de uma transita para um ponto determinado da outra, formando então assim o conjunto de todas as determinações específicas obtidas uma variedade extensiva a duas-dimensões. Da mesma maneira, obtém-se uma variedade extensiva a três-dimensões, se for imaginada uma com extensão a duas-dimensões transitando de forma determinada para outra completamente diferente, e é bom de ver como esta construção pode ser continuada. Quando, em vez de tomarmos o conceito como determinante, atentamos no objecto como variável, esta construção pode então ser descrita como um conjunto de variedade <*Veränderlichkeit*> a $n + 1$ dimensões, como uma variedade a n dimensões e como uma variedade a uma dimensão.

3.

Mostrarei agora, inversamente, como se pode decompor uma variedade <*Veränderlichkeit*> cuja região é dada, numa variedade a uma dimensão, e numa variedade a menos dimensões. Para este fim, suponha-se uma porção variável de uma variedade <*Mannigfaltigkeit*> a uma dimensão – calculada a partir de um ponto de origem fixo <*Anfangspunkt*>, de modo a que os seus valores possam ser comparados com os de uma outra – a qual, para cada ponto da variedade dada, tem um valor determinado que varia com ele, ou por outras palavras, tome-se uma função contínua

[6] A nosso ver, a tradução de <*Quantitätsbestimmung*> por *determinação numérica* <*numerical determination*>, como faz Spivak, é excessiva. (N. T.)

da posição dentro da variedade dada, mais precisamente uma tal função que não seja constante ao longo de uma qualquer região dessa variedade. Todo o sistema de pontos, onde a função tem um valor constante, forma então uma variedade contínua a menos dimensões do que a que foi dada. Estas variedades transitam continuamente de uma para a outra conforme a função muda; podemos consequentemente assumir que, fora de uma delas, as outras prosseguem e, tomado na generalidade, isto pode acontecer de tal maneira que cada ponto transita para um ponto determinado na outra; os casos excepcionais, cuja investigação é importante, não carecem aqui de consideração. Por este meio, a determinação da posição na variedade dada é reduzida à determinação da grandeza e à determinação da posição numa variedade a menos dimensões. Agora é então fácil mostrar que esta variedade é a $n-1$ dimensões, quando a variedade dada é uma extensão a n-dimensões. Repetindo este processo n vezes, a determinação da posição numa variedade de extensão a n-dimensões é então reduzida a n determinações da grandeza, e como tal a determinação da posição numa dada variedade, quando isso é possível, é reduzida a um número finito de determinações quantitativas. Há variedades nas quais a determinação da posição não requer um número finito, mas ou uma série infinita ou uma variedade contínua de determinações da grandeza. Tais variedades formam, por exemplo, as possíveis determinações de uma função para uma dada região, as formas possíveis de uma figura no espaço, e por aí fora.

II. Relações métricas de que uma variedade a *n*-dimensões é passível, de acordo com a pressuposição de que as linhas possuem um comprimento independente da posição, e de que consequentemente cada linha é mensurável a partir de outra

Resulta então, uma vez que se construiu o conceito de uma variedade extensiva a n-dimensões, e que a característica fundamental que nele pode ser descoberta consiste na propriedade de que a determinação da posição deixa-se nela reduzir a n determinações de grandeza, voltarmo-nos para a segunda das tarefas acima propostas, [a saber,] a investigação das relações métricas de que uma tal variedade é passível, e das condições suficientes para determiná-las. Estas relações métricas deixam-se investigar apenas por meio de conceitos de grandeza abstractos e as suas relações mútuas[7] só são representáveis por fórmulas; em certas pressuposições, elas podem contudo ser decompostas em relações, as quais tomadas isoladamente, são

[7] Spivak opta por *interdependência* (em vez de *relação mútua*, ou *conjunto*, ou *nexo*) para traduzir <*Zusammenhange*> escolha que clarifica bastante este passo; optamos porém por esta tradução para a harmonizar com a tradução do mesmo termo na terceira secção do texto. (N. T.)

passíveis de representação geométrica, e assim torna-se possível exprimir geometricamente os resultados do cálculo. Por isso, para alcançar terreno firme, na verdade não se podem evitar considerações abstractas nas fórmulas, porém esses mesmos resultados podem ser apresentados numa forma geométrica. Para ambos, os fundamentos estão estabelecidos na célebre dissertação sobre as superfícies curvas[8] do ilustríssimo[9] Sr. Gauss.

1.

Determinações de medida requerem uma autonomia da grandeza face à posição, que pode ocorrer de mais de uma maneira; a que primeiramente se apresenta, e a qual aqui quero perseguir, é aquela de acordo com a qual o comprimento <*Länge*> das linhas é independente da sua posição <*Lage*>[10], e como tal cada linha é mensurável por meio de qualquer outra. Seja a determinação da posição reduzida à determinação da grandeza, e como tal a posição de um ponto exprimida, na variedade extensiva a n-dimensões, através de n grandezas variáveis x_1, x_2, x_3, e por aí fora até x_n, segue-se daí, quanto à determinação de uma linha, que as grandezas x serão dadas como funções de uma variável. A tarefa é então a de estabelecer uma expressão matemática para o comprimento das linhas, para cujo fim se devem considerar as grandezas x como exprimíveis em unidades. Darei conta desta tarefa apenas segundo certas restrições, e restringir-me-ei primeiramente a estas linhas, nas quais as relações[11] das grandezas dx – a variação conjunta com a grandeza x – variam continuamente; podemos então conceber estas linhas como decompostas em elementos, dentro dos quais as relações das grandezas dx podem ser observadas como constantes, e segue-se então que a tarefa é pois reduzida ao estabelecimento, para cada ponto, de uma expressão geral para os elementos lineares <*Linienelements*> ds que nele começam, a qual irá portanto conter as grandezas x e as grandezas dx. Irei supor apenas, em segundo lugar, que o comprimento do elemento linear, abstraindo de grandezas de segunda ordem, permanece inalterado quando todos os mesmos pontos sofrem um deslocamento infinitesimal, o que implica simultaneamente que se todas as grandezas dx aumentam na mesma relação, o elemento linear varia também na mesma relação. De acordo com estas suposições, o elemento linear pode ser

[8] C. F. Gauss, *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*, Göttingen, 1827. (N. T.)
[9] Vd. supra nota 4.
[10] Spivak faz uma tradução muito interpretativa do termo <*Lage*> quando aplicado às linhas, ou seja, traduz <*Lage*> por <*configuration*>, *configuração*, e não por *posição* ou *situação*.
[11] Tanto Clifford como Spivak optam por, neste passo, traduzir <*Verhältnisse*> (*relações*) por *rácios* (*ratios*, que adiante traduziremos também por *razões*), o que nos parece uma escolha muitíssimo adequada, tendo em conta o que imediatamente a seguir Riemann acrescenta em aposto. (N. T.)

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência 2: 2011.

qualquer função homogénea do primeiro grau das grandezas *dx*, que permanece inalterada quando alteramos todos esses mesmos sinais das grandezas *dx*, e na qual as constantes arbitrárias são funções contínuas das grandezas *x*. Para encontrar os casos mais simples, procurarei primeiro uma expressão para as variedades extensivas a (*n* – 1) dimensões, as quais são sempre em todo o lado equidistantes ao ponto de origem do elemento linear, ou seja, encontrarei uma função contínua de posição, que se distinga de outras. Saindo para fora do ponto de origem, esta tem, em todas as direcções, ou de diminuir, ou de aumentar; eu quero assumir que ela aumenta em todas as direcções e consequentemente, tem o seu mínimo nesse ponto de origem. Então, quando o seu primeiro e segundo coeficientes diferenciais são finitos, o seu diferencial de primeira ordem deve desaparecer, e o diferencial de segunda ordem não deve poder tornar-se negativo; eu assumo que ele permanece sempre positivo. Esta expressão diferencial de segunda ordem permanece então constante, quando *ds* permanece constante, e cresce na razão quadrada quando a grandeza *dx*, e logo também a *ds*, crescem na mesma razão; é então igual à constante.ds^2 [a constante multiplicada por ds^2] e consequentemente *ds* = raiz quadrada de uma função homogénea integral sempre positiva do segundo grau para as grandezas *ds*, nas quais os coeficientes são funções contínuas das grandezas *x*. Para o espaço, quando se expressa a posição dos pontos através de coordenadas rectilíneas, $ds = \sqrt{\sum(dx)^2}$; o espaço é então incluído neste caso mais simples. O próximo caso, em simplicidade, inclui essas variedades nas quais o elemento linear pode ser expresso através da quarta raiz de uma expressão diferencial do quarto grau. A investigação deste tipo mais geral não requereria princípios diferentes, mas tomaria um tempo considerável e, em proporção ao esforço, pouca luz lançaria sobre a teoria do espaço, especialmente tendo em conta que os resultados não se deixam exprimir geometricamente; consequentemente, restrinjo-me às variedades nas quais o elemento linear é expresso através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau. Podemos transformar uma tal expressão noutra similar, se tomarmos as funções variáveis *n* independentes por novas variáveis *n* independentes. Nesta medida não se pode portanto transformar qualquer expressão numa outra; pois a expressão contém $n\frac{n+1}{2}$ coeficientes, os quais são funções arbitrárias das variáveis independentes; através da introdução de novas variáveis só se podem satisfazer *n* relações, e como tal tornar iguais apenas *n* dos coeficientes para as grandezas dadas. Os restantes $n\frac{n-1}{2}$ [12] são então inteiramente determinados através da natureza do contínuo a representar, e portanto requerem-se funções de posição $n\frac{n-1}{2}$ para a determinação das suas relações

[12] Notação em Ewald: $\frac{1}{2}n(n-1)$. (N. T.)

métricas. Variedades nas quais o elemento linear se deixe reduzir à forma $\sqrt{\sum dx^2}$, como no Plano e no Espaço, constituem portanto apenas um caso particular das variedades a investigar aqui; elas merecem um nome particular, e como tal eu quero chamar planas a estas variedades nas quais o quadrado do elemento linear se deixa representar como a soma de diferenciais integrais. Para que se conheçam todas as diferenças fundamentais com a forma representável pressuposta na variedade, é necessário eliminar as dificuldades que emanam do modo como a representamos, o que será alcançado se escolhermos as grandezas variáveis de acordo com um princípio determinado.

2.

Para esse fim, pense-se no sistema das linhas mais curtas[13] que se pode construir a partir de um qualquer ponto dado; a posição de um ponto indeterminado pode então ser determinada através da direcção inicial <*Anfangsrichtung*> das linhas mais curtas nas quais ele se encontra, e através da distância destas ao ponto de origem, e pode, por isso, ser expressa através das relações das grandezas dx^0 [14], isto é, das grandezas dx na origem destas linhas mais curtas e através do comprimento s desta linha. Estamos agora então em condições de, em vez de dx^0, estabelecer $d\alpha$ como as suas funções lineares, onde o valor inicial do quadrado do elemento linear equivale à soma dos quadrados destas expressões, de tal modo que as variáveis independentes são: a grandeza s e as razões das grandezas $d\alpha$; e finalmente em vez de tomar $d\alpha$ como as grandezas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que lhes são proporcionais, tomá-las como as somas dos seus quadrados = s^2. Introduzindo estas grandezas, o quadrado do elemento linear torna-se $=\sum dx^2$ para valores infinitesimais de x, sendo contudo o membro da ordem seguinte igual a uma função homogénea de segundo grau das grandezas $n\frac{n-1}{2}$ $(x_1\ dx_2 - x_2\ dx_1)$, $(x_1\ dx_3 - x_3\ dx_1)$..., portanto, uma grandeza infinitesimal da quarta dimensão, de tal modo que obtemos uma grandeza finita quando a dividimos pelo quadrado do triângulo infinitesimal, para cujos vértices os valores são $(0,0,0,\ldots)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \ldots)$. Esta grandeza mantém o mesmo valor, desde que as grandezas x e as dx estejam incluídas na mesma forma linear binária, ou desde que as duas linhas mais curtas do valor 0 ao valor x e do valor 0 ao valor dx permaneçam no mesmo elemento da superfície <*Flächenelement*>, e se encontrem portanto no mesmo lugar e na mesma direcção <*Richtung*>. Será

[13] Após esta ocorrência, Clifford vai sempre optar por traduzir a expressão <*kürzestes Linien*>, *as linhas mais curtas* por <*geodesics*>, *geodésicos*; embora em geometria a distância mais curta entre dois pontos seja denominada *geodésico*, não é esse o termo que o autor usa; portanto, e embora fosse muito mais confortável usá-lo, optámos por ser fiéis à letra do texto. (N. T.)

[14] Notação em Ewald: dx_0. (N. T.)

obviamente = 0 quando a variedade mostrada é plana <*eben*>, isto é, quando o quadrado do elemento linear é redutível a $\sum dx^2$, e pode portanto ser vista como a medida do desvio <*Abweichung*> que, no ponto dado, a variedade tem da planura <*Ebenheit*>, na direcção da superfície <*Flächenrichtung*> dada. Multiplicada por $-\frac{3}{4}$ a grandeza torna-se equivalente ao que o ilustríssimo[15] Sr. Gauss designou por medida da curvatura <*Krümmungsmass*> de uma superfície. Para determinar as relações métricas de uma variedade extensiva a n-dimensões representável na forma assumida, acabámos de descobrir que são necessárias as funções de posição $n\frac{n-1}{2}$; se, portanto, for dada a medida da curvatura em cada ponto $n\frac{n-1}{2}$ das direcções da superfície, então as relações métricas da variedade deixam-se determinar a partir daí, desde que entre estes valores não ocorra nenhuma relação idêntica, o que de facto, e de uma maneira geral, não é o caso. As relações métricas desta variedade, cujo elemento linear pode ser exprimido através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau, deixam-se exprimir de modo inteiramente independente da escolha da grandeza variável. Um método completamente semelhante pode, para esta finalidade, também ser adoptado para as variedades nas quais o elemento linear tem uma expressão menos simples, por exemplo, através da quarta raiz de uma expressão diferencial do quarto grau. De uma maneira geral, neste caso o elemento linear já não é redutível à forma da raiz quadrada de uma soma de quadrados de uma expressão diferencial, e assim, na expressão do quadrado do elemento linear, o desvio em relação à planura é uma grandeza infinitesimal da segunda dimensão, ao passo que para essas variedades era uma grandeza infinitesimal da quarta dimensão. Esta propriedade destas últimas variedades pode então perfeitamente ser chamada de planura das partes mais pequenas. Para o presente propósito, a propriedade mais importante destas variedades, e por cuja razão são aqui unicamente investigadas, é a de que as relações das extensões[16] a duas dimensões podem ser geometricamente representadas através de superfícies, e as extensões a mais dimensões deixam-se determinar pelas propriedades das superfícies neles contidas, o que pede agora uma outra curta discussão.

3.

À concepção de superfícies misturam-se as suas relações métricas, nas quais é tido em consideração não apenas o comprimento das distâncias nelas contidas, mas também a posição dos pontos localizados fora dela. Pode porém abstrair-se de relações externas se considerarmos que estas não deformam o comprimento das

[15] Vd. supra nota 4.
[16] Clifford traduz <*ausgedehnten*> exactamente pelo termo geométrico, *contínuos* (<*continua*>). (N. T.)

linhas, o qual permanece inalterado, isto é, se as pensarmos curvadas – mas sem distensão <*Dehnung*> – e considerarmos todas as superfícies então resultantes como equivalentes. Assim também, por exemplo, qualquer superfície cilíndrica ou cónica é equivalente a um plano, pois ela deixa-se produzir a partir de um, simplesmente dobrando-o, no qual as relações métricas intrínsecas, todos os teoremas sobre elas – bem como toda a planimetria – conservam a sua validade; por outro lado, são essencialmente diferentes da esfera, a qual não pode ser convertida num plano sem ser distendida. Das anteriores investigações resultou que, em cada ponto, as relações métricas intrínsecas de uma grandeza extensiva a duas dimensões, quando o elemento linear se deixa exprimir através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau, como é o caso das superfícies, caracterizam-se pela curvatura. Quanto às superfícies, esta grandeza apresenta-se pois à interpretação intuitiva enquanto produto das duas curvaturas da superfície neste ponto, ou então como o seu produto por um triângulo infinitamente pequeno formado pelas linhas mais curtas, sendo, proporcionalmente ao rádio, metade do excesso da soma dos seus ângulos sobre dois ângulos rectos. A primeira definição pressupõe a proposição de acordo com a qual o produto dos dois rádios das curvaturas permanece inalterado se a superfície simplesmente for encurvada, a segunda, pressupõe que num mesmo ponto, o excesso da soma dos ângulos de um triângulo infinitesimal sobre dois rectos é proporcional à sua área. Para dar uma interpretação tangível à curvatura de uma variedade extensiva a *n*-dimensões, num dado ponto, e através de uma dada direcção da superfície, temos de partir daí, do facto de que a linha mais curta procedente de um ponto fica inteiramente determinada quando a sua direcção inicial é dada. Assim sendo, obtém-se uma superfície determinada quando se estendem todas as linhas mais curtas [na superfície] que partem do ponto dado e que procedem a partir da direcção inicial, e esta superfície tem, no ponto dado, uma curvatura determinada, a qual é também a curvatura da variedade extensiva a *n*-dimensões no ponto dado, na direcção da superfície dada.

4.

Agora, ainda antes de fazermos a aplicação ao espaço, algumas considerações sobre essas variedades planas em geral são necessárias, isto é, sobre aquelas nas quais o quadrado do elemento linear é exprimível através da soma de quadrados de diferenciais integrais.

Numa variedade extensiva plana a *n*-dimensões a curvatura em todos os pontos, em todas as direcções, é zero; podem contudo ampliar-se as anteriores investigações se se souber que, para determinar relações métricas, em cada ponto $n\frac{n-1}{2}$ na direcção da superfície a sua curvatura é independente [da de outros pontos] e é igual a zero. As variedades cuja curvatura é em todo o lado = 0 podem ser tratadas como um caso especial entre as variedades cuja curvatura é constante. O carácter comum destas variedades, cuja curvatura é constante, pode também ser expresso como as figuras podendo percorrê-las sem ser distendidas <*ohne Dehnung*>. Pois, obviamente, as figuras não podiam ser nelas arbitrariamente movidas e rodadas caso a curvatura não fosse a mesma em cada ponto, em cada direcção. Por outro lado, é através da curvatura que as relações métricas da variedade são completamente determinadas; por consequência, elas são, num ponto como noutro, exactamente as mesmas relações métricas em todas as direcções, e também as mesmas construções são exequíveis a partir delas, donde se segue que, nas variedades com curvatura constante, pode ser atribuída às figuras uma posição arbitrária. As relações métricas destas variedades dependem apenas do valor da curvatura, e em relação com a representação analítica pode notar-se que, quando se designa este valor por α, à expressão para o elemento linear pode ser dada a forma[17]

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}$$

5.

A consideração sobre as *superfícies* de curvatura constante pode servir para exposição geométrica. É bom de ver que a superfície cuja curvatura é positiva se deixa enrolar de modo a tornar-se uma esfera com rádio igual a 1 dividido pela raiz quadrada da curvatura; para contemplar todas as variedades com estas superfícies, imagine-se uma delas que tem a forma de uma esfera e as outras tendo a forma de superfícies de revolução <*Umdrehungsflächen*> que a tocam ao longo do equador. As superfícies com curvatura maior que a desta esfera tocarão a esfera no interior, e assumirão uma forma como a da região da superfície de um anel, exterior ao eixo; elas podem ser convertidas em zonas de esferas com rádios inferiores, mas contornarão a figura mais do que uma vez. As superfícies com menor curvatura positiva são obtidas a partir de superfícies esféricas com rádios maiores, cortando a lúnula <*begrenztes Stück*> que limita um dos dois grandes semi-círculos e juntando as

[17] Notação em Ewald: $\frac{1}{1+\frac{1}{4}\alpha\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}$. (N.T.)

linhas de intersecção seccionadas. A superfície com curvatura zero será um cilindro sobre o equador; as superfícies com curvatura negativa tocarão o cilindro externamente e serão formadas como a zona interior da superfície de um anel voltada para o eixo. Se pensarmos estas superfícies como o lugar <*Ort*> onde pode haver regiões da superfície que se deslocam, tal como o espaço é o lugar para os corpos, então nestas superfícies pode haver movimento de regiões da superfície sem que elas sejam distendidas. As superfícies com curvatura positiva podem ser sempre formadas assim, de modo que as regiões das superfícies <*Flächenstücke*> podem também ser movidas arbitrariamente sobre elas sem flexão <*Biegung*>, nomeadamente sobre superfícies esféricas, mas as com curvatura negativa não. Para lá desta independência da posição <*Ort*> em relação às regiões da superfície, encontramos também nas superfícies de curvatura zero uma independência da direcção em relação à posição, a qual não constatamos nas restantes superfícies.

III. Aplicação ao Espaço

1.

De acordo com estas investigações sobre a determinação das relações métricas de uma variedade com grandeza extensiva a *n*-dimensões, podem prescrever-se as condições que são suficientes e necessárias para determinar as relações métricas do espaço desde que haja independência da linha em relação à sua posição[18] e a expressão do elemento linear for feita através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau, isto é, se as regiões mais pequenas forem planas.

Primeiro, elas deixam-se exprimir assim, a curvatura é em cada ponto, em três direcções da superfície, = 0, e é a partir daí que se determinam as propriedades métricas do espaço, quando a soma dos ângulos de um triângulo é, em todo o lado <*allenthalben*>, igual a dois rectos.

Tal como *Euclides*, estabeleça-se no entanto, em segundo lugar, não apenas uma existência das linhas independente da posição, mas também de corpos, seguindo-se então que a curvatura é em todo o lado constante, e então, em todos os triângulos, a soma dos ângulos é determinada quando um dos ângulos está determinado.

Em terceiro e finalmente, pode, em vez de tomar o comprimento das linhas como independente da posição <*Ort*> e da direcção, assumir-se também que o seu comprimento e direcção são independentes em relação à posição <*Lage*>. Por meio desta concepção, mudanças <*Ortsänderungen*> ou diferenças de posição

[18] Vide supra, nota 10.

<*Ortsverschiedenheiten*> são grandezas complexas exprimíveis em três unidades independentes.

2.

No curso das anteriores investigações, distinguiram-se primeiro as relações de extensão <*Ausdehnungsverhältnisse*> ou localização <*Gebietsverhältnisse*> das relações métricas, e descobriu-se que com as mesmas relações de extensão eram concebíveis diferentes relações métricas; procurou-se então o sistema de determinação de grandezas simples, através do qual as relações de grandeza do espaço são completamente determinadas e através das quais todas as proposições sobre elas resultam necessariamente; resta pois discutir a questão de como, em que grau, e com que amplitude, estas pressuposições são fornecidas pela experiência. Nesta afinidade, encontramos uma diferença essencial entre as simples relações de extensão e as relações de grandeza, na medida em que na primeira, onde os casos possíveis formam uma variedade discreta, as afirmações da experiência não são na verdade completamente seguras, mas também não são imprecisas, ao passo que na última, na qual os casos possíveis formam uma variedade contínua, toda a determinação proveniente da experiência permanece sempre imprecisa – o que faz da probabilidade, senão quase certa, ainda assim bem alta. Esta consideração torna-se importante se estas determinações empíricas forem estendidas para lá dos limites da observação, ao desmedidamente grande e ao desmedidamente pequeno; pois a última pode, fora dos limites da observação, tornar-se sempre mais imprecisa, mas a primeira nem tanto.

Na extensão da construção sobre o espaço ao desmedidamente grande há que distinguir entre ilimitação <*Unbegrenztheit*> e infinitude <*Unendlichkeit*>; a primeira pertence às relações de extensão, esta às relações métricas. Que o espaço seja uma variedade extensiva ilimitada a três-dimensões é uma pressuposição que é apoiada por toda a concepção do mundo exterior, de acordo com a qual a área da percepção real é constantemente completada e as possíveis posições de um objecto procurado são construídas, e a qual, através destas aplicações, incessantemente a si mesmo se corrobora. A ilimitação do espaço possui portanto uma certeza empírica maior que qualquer outra experiência externa. Mas daqui não se extrai a infinitude de modo nenhum; antes, quando se pressupõe a independência dos corpos em relação à posição, e também prescrevemos ao espaço uma curvatura constante, este é necessariamente finito, conquanto esta curvatura tenha pelo menos um pequeno elemento positivo. Devia obter-se, se partindo de uma direcção se prolongarem todas as linhas mais curtas num elemento da superfície, uma superfície ilimitada de curvatura positiva constante, isto é, obter uma superfície que numa variedade extensiva plana a três-dimensões assumiria a forma de uma superfície esférica, a qual seria consequentemente finita.

3.

As questões sobre o desmedidamente grande são, para a compreensão da natureza, questões inúteis. Diferentemente sucede com as questões sobre o desmedidamente pequeno. É na exactidão com que acompanhamos os fenómenos até ao desmedidamente pequeno que essencialmente se funda o conhecimento das suas conexões causais mútuas <*Causalzusammenhang*>. O progresso dos séculos recentes no conhecimento da mecânica da natureza foi quase apenas devido à exactidão da construção, possível através da invenção da análise do infinito, e dos princípios simples descobertos por *Arquimedes*, *Galileu* e *Newton*, os quais são usados pela física contemporânea. Contudo, nas ciências naturais, as quais estão até agora carentes desses princípios simples para tais construções, perseguem-se os fenómenos até ao muitíssimo pequeno, a fim de conhecer as conexões causais mútuas, tanto quanto o microscópio queira permitir. Questões sobre as relações métricas do espaço no desmedidamente pequeno não são então questões inúteis.

Se desde logo se estabelecer o enunciado de que os corpos existem independentemente da posição, então a curvatura é em todo o lado constante, e então resulta das medições astronómicas que não pode ser diferente de zero; de qualquer modo, o seu elemento recíproco tem de ser uma superfície, a qual, em relação à área acessível aos nossos telescópios, pode ser descurada. Mas quando não existe uma tal independência dos corpos em relação à posição, não se podem tirar conclusões das relações métricas do grande para o infinitamente pequeno; é possível então que a curvatura em cada ponto, em três direcções, possa ter qualquer valor, bastando apenas que a curvatura de todas as porções de espaço <*Raumtheils*> mensuráveis não seja sensivelmente diferente de zero; podem ainda surgir relações mais complicadas quando não existe uma suposta representação dos elementos lineares através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau. Ora, parece contudo que os conceitos empíricos, nos quais se fundam as determinações métricas do espaço (a noção de corpo sólido e a de raio de luz), perdem a sua validade no infinitamente pequeno <*Unendlichklein*>[19]; é então muito plausível que as relações métricas do espaço no infinitamente pequeno não sejam conformes com as proposições

[19] Repare-se nas três ocorrências seguintes, a nosso ver nada negligenciáveis, do termo <*Unendlichklein*> em lugar de <*Unmessbarklein*>.

fundamentais da geometria, e é-se de facto obrigado a aceitar isto enquanto não se lograr explicar os fenómenos de modo mais simples.

A questão da validade das proposições fundamentais da geometria no infinitamente pequeno aparece ligada à questão do mais profundo fundamento das relações métricas do espaço. Nesta última questão, que pode muito bem ainda ser considerada como relativa à doutrina do espaço, aparece a aplicação da observação feita acima, que numa variedade discreta o princípio das relações métricas está contido no próprio conceito destas variedades, mas, diferentemente, numa contínua tem de vir de fora. É então forçoso que ou os fundamentos da realidade sobre os quais o espaço repousa formem uma variedade discreta, ou então procurar os fundamentos das relações de medida fora dele, nas forças que sobre ele actuam e que ligam os seus elementos.

O veredicto para estas perguntas pode apenas ser encontrado partindo da concepção dos fenómenos que a experiência deu como provados, e para os quais *Newton* estabeleceu os fundamentos, e isto por meio de factos fundamentais que, se ela [a concepção dos fenómenos] não consegue explicar, deve procurar afinar gradualmente; tais investigações que, como a que aqui foi perseguida, partem de conceitos gerais, só podem aí ser úteis se ajudarem a preservar esse trabalho de concepções tacanhas, e a resguardar dos preconceitos o progresso no conhecimento das relações mútuas entre as coisas.

Isso conduz ao domínio de uma outra ciência, ao domínio da física, no qual a natureza da comunicação de hoje não nos permite certamente entrar.

Sumário

Plano da Investigação

I. Conceito de uma grandeza extensiva a *n*-dimensões.

§1. Variedades discretas e contínuas. Regiões determinadas de uma variedade chamam-se Quanta. Classificação da teoria da grandeza contínua nas teorias

1) das simples relações entre regiões, nas quais não é pressuposta uma independência das grandezas em relação à posição,

2) das relações de grandeza, nas quais tem de ser pressuposta uma tal independência.

§2. Constituição dos conceitos de variedade de grandeza extensiva a uma, duas, …, *n* dimensões.

§3. Redução da determinação da posição numa variedade dada às determinações quantitativas. Especificidades fundamentais de uma variedade extensiva a *n*-dimensões.

II. Relações métricas de que uma variedade a *n*-dimensões é passível, segundo o pressuposto de que as linhas possuem um comprimento independente da posição, e como tal que cada linha é mensurável a partir de outra

§1. Expressão dos elementos lineares. De como estas variedades devem ser consideradas planas, quando nelas o elemento linear é exprimível através da raiz de uma soma de quadrados de expressões diferenciais integrais.

§2. Investigação das variedades extensivas a *n*-dimensões nas quais o elemento linear pode ser representado através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau. Medição do seu desvio em relação à planura (curvatura) num dado ponto e numa dada direcção da superfície. Para a determinação das suas relações métricas é lícito e suficiente que a curvatura seja dada arbitrariamente em cada ponto $n\frac{n-1}{2}$ na direcção da superfície.

§3. Elucidação geométrica.

§4. As variedades planas (nas quais a curvatura é, em todo o lado, = 0) podem ser consideradas um caso especial das variedades com curvatura constante. Elas também podem ser definidas por permitirem em si uma independência das grandezas extensivas a *n*-dimensões em relação à posição (a sua mobilidade sem deformação).

§5. Superfícies com curvatura constante.

III. Aplicação ao espaço

§1. Sistema dos factos fundamentais que são suficientes para determinar as relações de medida do espaço, os quais a geometria pressupõe.

§2. Em que medida a validade destas determinações empíricas mantém a sua probabilidade quando é levada para além dos limites da observação, no desmedidamente grande?

§3. Em que medida no infinitamente pequeno? Ligação desta questão com a explicação da natureza.

(Tradução de S. Varela Sousa)[20]

[20] Feita a partir do texto alemão transcrito por D. R. Wilkins, confrontada com as traduções inglesas de William Kingdon Clifford (edição da *Nature*, vol. VIII, nºs. 183, 184, pp. 14-17, 36, 37; edição de William Bragg Ewald, *From Kant to Hilbert: A Source Book In The Foundations Of Mathematics*, vol. II, pp. 652-661, Oxford University Press, Nova Iorque, 1996) e de Michael Spivak (*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. II, pp. 151-162, Publish or Perish, Houston, 1999).