Kairos

Revista de Filosofia & Ciência
Journal of Philosophy & Science

Kairos 2

Maio
May
2011

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência
Kairos. Journal of Philosophy & Science

ISSN: 1647-659X

Edição: Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa

Índice

Artigos

Sentidos da Filosofia
(Um Guião Problemático)[1]

João Lopes Alves
(CFCUL)
lopesalves.joao@sapo.pt

O tema é desmesurado, evidentemente. Tão e tanto que algumas precisões prévias não serão demais.

Em primeiro lugar: a ambição única que nos move é a de sinalizar espaços de discussão eminentemente interrogativos, eminentemente provisórios, embora, assim o espera o autor, guardando com o tema reais relações de pertinência. Interferem aqui limites inerentes a uma dada economia de tratamento, e às debilidades pessoais de quem escreve estas linhas. Mas à parte estes limites e estas debilidades conjunturais, a própria estrutura problemática do tema sempre obrigaria, por razões que contamos poder clarificar adiante, à abertura do interrogativo e, num certo sentido, do provisório. De resto, só como gracejo de péssimo gosto poderíamos comparecer aqui animados da pretensão de apontar a dedo o sentido da filosofia ocidental.[2] É certo que convém às vezes evitar a paralisia por medo ao risco do ridículo; mas não tanto.

Em segundo lugar (prevenção que já é apenas circunstancial) sinalizar, o que equivale a sugerir, tópicos possíveis para um debate será isso mesmo: a simples identificação de problemas, prescindindo-se do seu aprofundamento técnico, que melhor caberá se houver de caber, ou na medida em que possa caber, ao debate seguinte.

[1] Este texto é a recompilação dos tópicos de conferências proferidas em duas ocasiões perante profissionais do ensino de filosofia, adaptando-se o material coligido ao projecto editorial que a publicação deste artigo envolve: despoletar um debate a partir de guião problemático proposto de entrada. Trata-se de circunstancialismos em que pareceu que seria despropositado ensaiar na abertura algum esboço de desenvolvimento tendencialmente exaustivo do tema.

[2] *Ocidental,* sublinhamos. A esse discurso, cujo "début de la phrase'" terá sido pronunciado há uns 24 séculos pelo hipotético Tales, se circunscreverá o campo de referências daquilo de que queremos falar quando falamos de "filosofia". Ficam portanto fora do âmbito desta indagação as concepções do mundo do chamado pensamento oriental, as teologias dos grandes sistemas religiosos (os quais, mesmo quando, como é o caso extremo do cristianismo, intimamente comprometidos com o discurso filosófico, se mantêm sintonizados noutro comprimento de onda) e, porque não, as formas do que Lévi-Strauss designou por "pensamento selvagem", etc.

Em terceiro lugar: a nossa proposta de tópicos tomou a forma de uma prospecção por entre materiais de reflexão pessoal muito em bruto. Conversas com os meus pensamentos, para aproveitar, se me dão licença, uma das expressões tão características da bonomia de Descartes. Porém, como todos o sabemos, amigos da filosofia, esta amizade faz-se carne em letra e leitura, as nossas experiências de pensamento passam sempre por ruminações do discurso filosófico pretérito.

Embora ao ponderar a natureza "provocatória" do texto e a conveniência expositiva de o não abafar sob um denso aparelho de citações nos considerássemos eximidos da preocupação de assinalar, passo a passo, as suas fontes (por convergência ou por divergência), tudo o que vai ser dito tem referenciais de leitura, aliás identificáveis com facilidade, talvez até mais facilmente por quem nos quiser seguir além destas linhas do que por nós mesmos, que já teremos esquecido alguns. Por outras palavras: o único mérito que firmemente reivindicamos para a nossa intervenção é o de recusar quaisquer pretensões de originalidade.

* * *

Sentidos da filosofia é, pois, o tema. Ora pelo menos desde quando filosofar se tornou, como comenta Kojève, deixando a pairar na frase um suave perfume de ironia, aquela modalidade teórica circular que «parle non seulement de ce dont elle parle, mais encore du fait qu 'elle en parle et c'est elle qui en parle»[3], uma entrada muito filosófica neste tema será pôr à questão do sentido da filosofia a questão do sentido em que actua tal questão.

Julgo proveitoso abrir aqui o primeiro ponto de interrogação do dia. É que a peculiaridade da reflexão filosófica ressalta muito nitidamente dos contrastes exibidos pela questão do "sentido" quando posta em sede de filosofia, ou quando posta noutros domínios de saber teórico e prático.

Não que perguntar pelo "sentido" seja interrogação que só se produza no campo da filosofia (embora se possa dizer que a sua propositura já significa filosofar). Pelo contrário, a questão tende a surgir onde quer que se teorize; mas pô-la no interior da filosofia, ou no exterior, assinala uma clivagem de alcances muito sintomática. Quer se tome o ambíguo vocábulo "sentido" naquela acepção "essencialista" que, a propósito do direito, Kant considerou ser tão embaraçosa para o jurista como para o lógico resulta embaraçosa a pergunta «o que é a verdade?» (um embaraço que se reproduz analogamente se perguntamos pela ciência, ou por determinada ciência, pela

---

[3] Vide Introduction in *Essai d'une histoire raisonnée de la Philosophie Payénne*, tome I, Gallimard, 1968, p. 30.

arte, ou por determinada forma de arte, etc.), quer "sentido" designe mais modestamente directrizes problemáticas que devam encaminhar a investigação ou a prática (quase sempre a modéstia é falsa, pois estas estratégias teleológicas propendem a subentender uma ontologia de suporte), semelhante questionamento mostra-se tão corriqueiro quanto corriqueiro é também o embaraço denunciado pelas tentativas de resposta. Mas ao actuar em domínios "extra filosóficos" a dúvida que a questão carrega consigo põe em tela de juízo um "dever ser" do domínio questionado reportável ao seu preciso recorte onto-epistemológico ou a uma correcta valoração de problemáticas, sem por isso alargar a indecisão até à vigência mesma do "ser". Quando se pergunta: o que é o direito? Ou a biologia? Ou o cinema? Ou a linguagem? não se duvida que se manifestem e actuem realmente fenómenos como os comandos jurídicos, a vida biológica, os filmes, as línguas. É verdade que em alguns casos as respostas à pergunta sobre o que é um dado domínio deslizam para rejeições da sua consistência, em nome de valores afirmados noutras regiões do "real" – estamos a pensar em certas contestações do direito a partir da crítica marxista às supra-estruturas ideológicas, ou da ciência desde pontos de vista religiosos, isto para não falar da expulsão da poesia na cidade perfeita platónica – mas mesmo nessas posições limite o mais que fica debaixo de fogo é a "imagem ideológica" que, v.g., o direito faz de si próprio, ou os efeitos maléficos que "ciência" ou "arte" produziriam na cidade, ou na felicidade dos singulares entes humanos. A efectividade do domínio contesta/do – i. e., a realidade dos seus *efeitos* e da *causa* desses efeitos – não só não é posta em dúvida como é ela que suscita e justifica as dúvidas ou as condenações.

Ora a questão do "sentido" da filosofia tende a subsumir dúvidas de uma radicalidade toda outra. O que entra em zona de incertezas é a *possibilidade* do que vem questionado.

Quando nos interrogamos hoje sobre o "sentido da filosofia" não é só o sentido que se põe em causa, mas a própria filosofia. Não será este um exercício estéril ou inócuo? Um devaneio do espírito à margem das exigências efectivas do conhecimento e da prática? Ou forma refinada de "falsa consciência" para fins de ocultação ou justificação ideológica? Senão mesmo o desenvolvimento cancerígeno de doenças da linguagem natural? Será que a filosofia, como o disse um positivista do século passado, talvez tocando em algo de mais profundo do que supunha tocar, consiste na inútil ciência daquilo que toda a gente ignora?

Estas dúvidas não são simples conjecturas de imaginação mas atitudes intelectuais com vigência histórica, e eu atrevo-me a presumir que, numa ou noutra versão, continuam a angustiar todos quantos escolheram tratar, na sua vida, com o trabalho filosófico.

Parece que há uma fragilidade, uma incerteza de raiz sobre si mesma a acompanhar recorrentemente a experiência filosófica. E tanto que uma das mais fortes e constantes "experiências da consciência", como diria Hegel, que se prolongam na história da filosofia é justamente a experiência céptica – sintoma daqueles desesperos da razão diagnosticados por Kant, razão dilacerada entre as grandes ambições de um saber filosófico tornado "metafísica" e os escassos poderes que exibe nas ordens do que acontece, do que se conhece, do que se faz.

Contemporaneamente, o cepticismo sobre o "sentido" da filosofia – o receio de que o "sentido" seja nenhum – alimenta-se em duas grandes nascentes que tanto irrigam áreas de acentuada sofisticação epistemológica como as representações literárias e até do senso comum: uma consiste no problema – moderno – da relação (ou falta de relação) entre filosofia e ciências; outra provém da ineficácia – antiga – do discurso filosófico nos terrenos da prática. Sobretudo de uma prática entendida como pragmática.

O modo como o advento da ciência moderna comprometeu o capital de crédito da filosofia é tema que se encontra bem localizado e exaustivamente aprofundado: porque o casamento feliz que puderam celebrar nos tempos modernos o experimentalismo e a formalização matemática se mostrou impressionantemente fecundo no campo das ciências exactas e naturais (mesmo só desde esse casamento é que elas se tornaram *exactas*) postula-se a identificação entre conhecimento rigoroso e este paradigma científico[4], para, na medida em que a filosofia, cujos enunciados não são testáveis empiricamente nem parecem afeiçoáveis a linguagens "artificiais", se não compagina com aqueles módulos de racionalidade, concluir pelo seu anacronismo, pela sua esterilidade, pelo seu carácter mistificador, se não por tudo isto ao mesmo tempo. No fundo, é desta perspectiva que uma filosofia não estritamente subordinada ao trabalho das ciências resulta focada pelas diversas famílias do grande movimento de ideias que, sob a designação genérica de "positivismo", passou a ocupar no pensamento ocidental o espaço considerável que todos conhecemos. Não foi a primeira vez que se constituiu uma filosofia anti-filosófica; historicamente, porém, é inédito que o elemento anti-filosófico se não definisse pelo negativo, a partir de carências da filosofia, mas *positivamente* pelos *resultados*, ou reais efeitos de conhecimento, de uma outra organização do saber. Daí a força dos positivismos na era

[4] Como se sabe entra-se aqui num vastíssimo campo de batalha teórico. Anotaremos só que, sendo difícil negar os efeitos de conhecimento rigoroso emergentes da práticas científicas que conjugam as certificações da experiência e a evidência racional da linguagem matemática, a estrutura conceptual do "paradigma" e sua área de pertinência são, e cada vez mais, problemas a descoberto. Por outro lado, não é pacífica a identificação entre conhecimento matemático e conhecimento rigoroso, pois da admissão de que sejam rigorosos os resultados do primeiro não se infere necessariamente que nele se esgotem *todas* as formas adequadas de rigor (problema particularmente agudo quando se transita para o domínio das ciências sociais e humanas).

contemporânea e a seriedade dos problemas que introduziram no campo das investigações filosóficas.

Quanto ao divórcio entre a filosofia e prática, é um problema muito antigo, tão antigo talvez como a própria filosofia, este reconhecimento das suas grandes dificuldades em dar conta da contingência do acto (e consecutivamente, da sua inaptidão para servir de princípio regulador ou de guia da acção humana no mundo). Mas, na era contemporânea, a conversão das ciências em tecnologias, própria da civilização industrial, e a concomitante aspiração de se alcançar o controlo do processo histórico em termos de necessidade rigorosa análogos aos do domínio dos processos naturais pela ciência, agravou a vulnerabilidade do discurso filosófico. Embora neste campo – em grosso, o da relação entre filosofia e metamorfoses sociais – tudo seja muito mais fluído, a começar pela instabilidade metodológica das "ciências sociais" e "humanas" que as coloca perante as ciências experimentais e lógico-matemáticas em posições de incerteza semelhantes às da filosofia, também aqui o positivismo cientista entrou em força mas encontrando a poderosa concorrência do marxismo, ou, se preferirem, dos vários marxismos (de resto, são igualmente vários os positivismos como vários são sempre os ismos de todas as grandes correntes do pensamento).

O *quid* de uma possível articulação entre o(s) marxismos e a reflexão de tipo filosófico, ou, mais claramente, se é legítimo definir no interior do(s) marxismos um espaço de filosofia (do exterior é sempre possível, mas para cometer trivialidades ideológicas, pró ou contra que não filosofia) subsiste como um problema em aberto. A optar pela afirmativa, parece que se trata de uma filosofia latente ou implícita, mesmo que se admita a tese do último Althusser de que é precisamente essa ausência de um dispositivo filosófico ostensivo o que produz prodigiosos efeitos filosóficos adentro do marxismo. Será; mas que Marx e Engels preferissem designar o seu *corpus* teórico por "socialismo científico" diz mais do que os brilhantes paradoxos e Althusser sobre a pretensão de fundo que, pelo menos, animou o "núcleo duro" do marxismo : uma "ciência da sociedade" – mais precisamente das transformações sociais (que Engels vislumbrava em linha de continuidade racional se não de homologia) como uma ciência da "história da Natureza".

Não cabendo por agora ir além desta ultra-epidérmica alusão ao que é um grande problema, e, sobretudo, para a filosofia (o que chamamos marxismo é bastante mais e outra coisa do que as relações com o discurso filosófico, como é bastante mais do que a inexaurível reinterpretação dos textos de Marx e de Engels), diremos só que duvidamos que a interrogação de tipo filosófico possa registar aqui o ganho de muito pontos. Talvez por isso mesmo Althusser, ao comentar há uns anos as debilidades de raiz do discurso filosófico, lembrasse que hoje, como nos tempos do *Teeteto*, o filósofo continua a ser um personagem eminentemente *cómico*: olhos nas estrelas pé no buraco, o filósofo faz rir. Mas, à força de acontecer, o pé no buraco do filósofo (tão controlado como os de Chaplin), ainda faz pensar.

Por exemplo, é instrutivo comparar os estereótipos de comicidade do filósofo, persistentemente recorrentes nas representações do senso comum da literatura e até da filosofia – não foi Nietzsche quem definiu Sócrates como o polichinelo que conseguiu ser levado a sério? – e os estereótipos ameaçadores do cientista moderno. Salvo raríssimas excepções (só nos está a ocorrer a Academia das Ciências de Lapúcia, nas Viagens de Gulliver, e a imagem amavelmente lunática do professor Tornesol de Hergé) o retrato do homem de ciência, e disso se lamentou há uns anos o cientista Jacques Monod, propende a acompanhar um perfil fáustico de animal de presa, demiurgo possesso de uma vontade de domínio sobre as coisas e sobre os outros. Falai em ciência e logo assomam à lembrança Frankenstein, o Dr. Moriarty, Strangelove, ou a colectivização do estereótipo nas inúmeras utopias negras de um mundo feito à imagem e semelhança da lógica científica. Obviamente se o fantasma da filosofia é o polichinelo desajeitado que faz rir, o fantasma da ciência é o papão que faz medo. O que designa esta substituição do antigo terror perante a omnipotência da natureza pelo recente terror que provoca o *domínio sobre a natureza*, é também óbvio: a ciência confiscou o poder; digo mais: a ciência *é* o poder.

Caso prevaleça esta perspectiva do mundo, que se não domina realmente as coisas pelo menos domina as imaginações, o espaço da filosofia arrisca-se a ficar muito rarefeito: ou a subordinam às realizações da ciência, tal sucede nos projectos positivistas da filosofia como "síntese das ciências" ou como uma sua "lógica" de unificação fundamental, sucedâneos menores, em registo de dependência, das antigas pretensões da "filosofia primeira" e da "filosofia última" e cujos êxitos de valor acrescentado aos conhecimentos não têm sido notáveis; ou então reservar-lhe a função de posto abastecedor de suplementos de alma não será mau de todo como emprego. Pois a alternativa é confiná-la aos limites de um discurso morto, como o grego clássico ou o latim, estudável por comunidades de estimáveis eruditos e, eventualmente, ensinável como durante algum tempo se defendeu o ensino do latim: para ginasticar o espírito. O ponto fraco de semelhantes projectos é que ninguém fala latim, latinistas incluídos: de modo que, mais tarde ou mais cedo, o projecto acaba por falir, como faliu o ensino generalizado do latim. Será este o destino da filosofia?

Não se pode excluir peremptoriamente que o seja (quem do futuro pode excluir peremptoriamente alguma possibilidade de acontecimento?). Mas há razões para não dar o óbito como provável. Em primeiro lugar, um índice exterior que é a persistência, contra ventos e marés, do poder atractivo das interrogações filosóficas: mais do que a Igreja Católica, quase tanto como a China, a filosofia dura. Depois, dura actuando em mentes que, com toda a evidência, não são as dos mais tontos dos homens e das mulheres deste mundo. Pode acrescentar-se para uso de quem cultive temores reverenciais perante a autoridade intelectual dos praticantes de trabalho científico que precisamente entre eles hoje como sempre se produz alguma da reflexão de tipo filosófico mais importante do nosso tempo. Deve mesmo dizer-se que são "filósofos" em *full time* quem, na actualidade, aparece a opor maiores embargos à validade da problemática filosófica, não tanto as pessoas afeiçoadas às disciplinas de rigor da prática científica. Não significará esta duração algo mais do que o simples facto de durar?

Não será que – e abro o segundo ponto de interrogações do dia – a radical incerteza da filosofia é consubstancial à própria emergência duradoura do pensamento filosófico? Será a incerteza não um sintoma de desnecessidade mas uma razão de necessidade?[5]

Anote-se, porém que a filosofia, isto é, a comunidade dos filósofos, não tem acolhido à boa paz este estatuto de fragilidade senão de subalternidade para com o mundo das ciências. A verdade é que foram ensaiadas retaliações com uma diversidade estratégica e táctica que vai do contra ataque em força com total concentração do poder de fogo até aos movimentos dispersos da luta de guerrilhas.

O contra ataque maciço alcançou a expressão extrema nos projectos que têm procurado reciclar as ambições de totalização do saber que foram as da antiga Metafísica. Já que a Metafísica filosófica é impotente para produzir conhecimentos, vale dizer, já que não pode ser ciência – questão que o filósofo Kant terá arrumado de uma vez por todas – então que se defina como uma metaciência, imperatriz dos saberes com os atributos *majestáticos* da *totalidade*, da *autonomia* e da *pan-nomia*.[6] Da *totalidade* porque, para além dos territórios da especialização do trabalho científico, a filosofia teria por objecto a totalidade do "real", da *autonomia* porque seria ela mesma a legisladora das leis próprias sem as submeter a controlo algum externo à sua razão; da *pan-nomia* porque nas leis filosóficas residiria também o fundamento ontológico de todas as outras disciplinas teóricas e práticas.

---

[5] Ouça-se, de passagem, um homem de ciência que deixou provas convincentes de não ser um espírito brumoso ou sequer modesto quanto às faculdades de discernimento próprias (antes propendia como lhe escreveu Wittgenstein a considerar estupidez tudo aquilo que escapasse à sua compreensão): «a filosofia deve ser estudada não por virtude da resposta precisa que faculte aos problemas que ela própria evoca - pois que resposta alguma precisa pode, por via de regra, ser conhecida como verdadeira - mas sim por virtude desses próprios problemas» (Bertrand Russell, *apud*, trad. António Sérgio, *Os problemas da filosofia*, Coimbra, A. Amado, 1973, p. 241).

[6] Anote-se que os contornos intencionais desta "metaciência" moderna não coincidem com os da "metafísica" clássica. A metafísica foi a ciência das "essências" (Platão), ou das "formas" (Aristóteles), ou da "substância" (Aquino), logo, a ciência de um objecto englobante que integrava no seu âmbito fundamental e hierarquizador todos os saberes particulares da "aparência", da "matéria"ou da "acidentalidade". Já a metaciência tem de conceder às ciências muito de real autonomia nos planos gnoseológico, lógico e metodológico das respectivas "regiões" e daí que venha postar-se, ao lado, acima ou abaixo das ciências (mas sempre de fora portanto) como maestro que lhes "sintetiza" os sentidos e (ou) fornece os fundamentos ontológicos.

E de recear que esta pretensão imperial ilustre aquela repetição das tragédias em comédias que Marx apontou como constante histórica. Não bastando para se ser Aristóteles vestir-lhe a pele, deve reconhecer-se que os poderes desmedidos da filosofia como nova metafísica soberana não têm podido afirmar-se para fora dos "círculos hermenêuticos" que os reivindicam. Talvez nos respondam que da metafísica não é exigível senão esta auto-justificação tautológica, tanto mais que, bem vistas as coisas, tautológicos são todos os discursos; mas a esses lembraríamos que o trabalho multissecular do espírito humano tem consistido na sucessiva remoção das legitimações de "direito divino" do pensamento que cai na armadilha de repensar como "verdades" os conteúdos imediatos da sua "pensabilidade" além de que, o argumento da tautologia, mesmo dando de barato que opera aqui, serve para invalidar a pretensão metafísica, não para a fundar.

Aliás, que não são muito convincentes as credenciais de uma metafísica globalizante, reajustada ao pós-ciência moderna, gritam-no também aqueles filósofos – quase sempre, se não sempre, et pour cause, franco-atiradores ou dissidentes dos marcos institucionais da "comunidade filosófica" (escolas, academias. etc.) – que recusam as estratégias da guerra convencional, optando por reservar à intervenção filosófica acções de guerrilha. Tal é o sentido da abertura de um espaço próprio para a filosofia como modo interrogativo de estar-no-mundo, cultivo de uma moral da dúvida permanente, apelo a uma estética da ironia como a praticada por Kierkegaard. Em vez da estratégia de retomada do poder que a reivindicação do estatuto de supra-ciência supõe, uma estratégia de contra poder que reclama para a filosofia o papel de contestadora radical da ciência, assumindo-se mais como uma certa maneira de viver os pensamentos do que como modo de pensar os conhecimentos. Pressupondo, enfim, à Kierkegaard, a dinamitagem do universal pensado da "meta ciência" pela singularidade vivida dos existentes.

Embora aos níveis de generalidade e simplificação extremas em que nos estamos a mover, pensamos que valerá a pena sondar um pouco mais o "sentido" destes pólos limite de procura de um espaço próprio para a filosofia respirar, desde quando o advento da ciência moderna entrou a arruinar as unidades especulativas da antiga metafísica.

Ora importa lembrar que a filosofia como uma certa maneira de estar na vida, ou de fazer viver os pensamentos, não é atitude nova que aparecesse na história apenas quando se tratou de colmatar as brechas abertas no corpo metafísico pelo avanço das ciências. Pelo contrário, pode dizer-se que está presente logo no surgimento do projecto filosófico (basta recordar o episódio da morte de Sócrates, pelo menos segundo a impressionante montagem platónica) e tem acompanhado com persistência toda a sua trajectória, o que talvez indicie um problema real.

Segundo julgamos, o que compele à tentação de propor a filosofia como uma certa maneira de adequar o viver ao pensar e o pensar ao viver, por outras palavras: o que sobredetermina os projectos de religação da filosofia à vitalidade natural, é, paradoxalmente, que experiência filosófica tenha de começar por negar essa ligação. Para que a filosofia comece tem de se instituir uma descolagem entre os interesses imediatos do corpo e os comandos do pensamento, entre o mundo da *physis* e o mundo das ideias. Ciente da vulnerabilidade em que tal cisão deixa o seu discurso, pois o que os homens vivem, vivem-no nas dores e alegrias do corpo, o filósofo força-se, em fim de partida, a relançar pontes entre os ditames da razão e a realidade humana vital, a tentar estabelecer os fundamentos de uma possível erótica do espírito. Outra vez ocorre lembrar um dos trechos do teatro filosófico, de Platão: estamos a pensar, evidentemente, no admirável episódio de Alcibíades no *Banquete*, representação exemplar da tentativa, da questão que obriga à tentativa e das dificuldades que a tentativa defronta.

Dificuldades desde logo evidenciadas pelo extremado balancear das pontes, oscilantes, dentro do mesmo horizonte problemático de fundo, entre sagezas implosivas de ascese das pulsões do corpo, à Sócrates, e sagezas explosivas de afirmação dos direitos da vitalidade contra as limitações do pensamento, à Nietzsche, legítimo herdeiro daquele misterioso Cálicles que Koyré sugere possa ter sido uma figuração platónica do próprio Platão, antes de passar, ou não tivesse passado, pelo crivo dialéctico de Sócrates.

Pode haver nestas propostas (quando há) a preocupação muito salutar de reconduzir o trabalho da filosofia à experiência viva, e vivida, dos homens, abrindo-o criticamente a uma dimensão moral que não deve ser obliterada. Mas se o que se propõe "construtivamente" é a ingenuidade de uma como que subordinação do filosofar e, em geral, das condutas humanas a pulsões da vitalidade natural (os "instintos", de que repetidamente fala Nietzsche), ao que se oporia como factor de decadência da espécie ou de opressão do direito à felicidade inscrito nos corpos uma razão segunda vinda não se sabe bem donde, então convém dizer que esses mestrados do corpo são de todo estranhos à intencionalidade do projecto filosófico.

O que – consinta-se-nos um rapidíssimo parênteses – não significa carência vital ou destrutiva tirania do *logos* sobre as pulsões "libertárias" do corpo. É que as sagezas que investem directamente no corpo acabam por inculcar não a libertação deste mas a sua instrumentalização, como ressalta com nitidez em certas expressões do chamado pensamento oriental. Pelo contrário, a experiência filosófica, mercê da operação originária de desdobrar pensamento reflexivo e interesses imediatos do corpo, não só emancipa na realidade humana uma dimensão autónoma do pensar (o que é evidente), como também (o que se não patenteia com tanta evidência) permite libertar o corpo de uma sujeição directa aos ditames do "espírito". Porque o surgimento da filosofia tem como pressuposto de possibilidade a autonomização da subjectividade *pessoal* – uma noção que não é existencial-vitalista mas ético-jurídica – porque, consecutivamente, a filosofia não pode ser voz ventríloqua do corpo, mas fala de pessoas, a emancipação do indivíduo como sujeito autónomo, que o é no seu corpo, matriz daquela " personalidade infinita" (Hegel) cuja emergência é condição necessária (mas não suficiente) do discurso filosófico, corre paralelamente à emancipação virtual do corpo como corpo. Já nas disciplinas integradas do corpo e do pensamento – do pensamento pelo corpo, do corpo pelo pensamento – tende-se não a libertar mas a laminar quer corpo, quer pensamento, resultando duplamente expropriado o princípio da individualidade.

Talvez por isso se ninguém é mais parecido com um samurai ou um faquir do que outro samurai ou outro faquir, seria absurdo procurar um tipo caracteriológico padronizado para o filósofo. O perfil máximo desenhável para a actividade filosófica não se articula a atributos de singularidade existencial mas a uma relação com a objectividade do pensamento: o único sinal por que podemos identificar um rasto comum à generalidade dos filósofos – o plebeu Sócrates e o aristocrata Platão o imperador Marco Aurélio e o escravo Epicteto, o heróico Bruno e o cobarde Hobbes, o desprendido Espinosa e o potentado de honrarias e dinheiro Bacon, o rebelde Fichte e o conformista Schopenhauer – é que todos se mostram possessos da ideia fixa de "verdade". (Não da sua verdade, atente-se; mas da verdade, ainda quando essa verdade seja, para alguns, não haver verdades.) Esta é a sua paixão, ou, se quiserem a sua nobreza; a única, mas nobreza. Podem filósofos calar o que julgam ser a verdade ou só a insinuar, preferir-se brechtianamente Descartes a Sócrates, mas parece ser-lhes insuportável dizer mentiras filosóficas, na acepção em que S. Agostinho falou do erro com intenção. A mim pelo menos não acode exemplo algum em contrário. Talvez a isto quisesse aludir Aristóteles quando disse que a diferença entre o filósofo e o sofista passa pela diversa escolha da vida de um e de outro. Não se trata pois de uma diferença estimável em razão de maior ou menor acumulação de conhecimentos ou de mais ou menos habilidade no seu exercício – neste capítulo, o sofista até pode ser (e num certo sentido é sempre) mais sábio do que o filósofo – mas que provém de distintas morais na prática do pensamento: o filósofo não trafica com o pensar, também ele como Ricardo Reis abomina a mentira porque é uma inexactidão, ao passo que para o sofista[7], a suprema proeza consiste em fazer passar como verdadeiro o mais falso dos discursos.

---

[7] Não nos referimos necessariamente ao sofista "histórico" mas ao sofista segundo Platão, isto é, ao sofista como encenação filosófica da anti-filosofia.

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência 2: 2011.

E fechando o parêntese, abrimos um terceiro ponto de interrogação de certo modo por ele suscitado: que na origem da decisão de filosofar vigora um interesse da vontade, um preconceito em favor da razão no qual encontra suporte o projecto filosófico.

De novo nos socorremos do portentoso património platónico para ilustrar esta precedência: no debate Sócrates-Cálicles o segundo consegue fazer gripar o motor dialéctico de Sócrates quando, em desespero de causa, lhe objecta que, diga Sócrates o que disser, o jogo da razão a ele, Cálicles, não interessa. Contra tal declaração de guerra Sócrates não obtém ao nível lógico o mesmo êxito que contra outros interlocutores, e não obtém justamente porque é este lugar – o de interlocutor – aquilo que Cálicles recusa de maneira liminar. Com efeito, não há possibilidade de jogar xadrez contra um adversário que usa o tabuleiro não para colocar e mover as peças mas para agredir a cabeça do opositor. Platão não tematiza esta impossibilidade senão pelas vias alusivas que perpassam, com suprema elegância, ao longo dos seus diálogos: Sócrates, que desta vez não convence porque não pode convencer, faz calar o adversário usando na circunstância alguns passes de certo terrorismo verbal. Como se Platão quisesse subentender que contra os Cálicles deste mundo, só Cálicles e meio.

Diríamos então – outro tópico interrogativo em aberto – que a experiência filosófica, a diferente "escolha de vida" que supõe a opção interessada pela filosofia, recorta uma intencionalidade na relação para com o outro que tem originariamente a ver com a violência.

É um tópico explorado principalmente pelos teóricos da filosofia política, mas que possui, segundo pensamos, uma área de pertinência bem mais ampla. Que houve na emergência histórica da filosofia, indissociável organicamente do que Jean-Pierre Vernant denominou "o universo espiritual da polis", mercê da prodigiosa proeminência, que aí se assinala, da palavra como tessitura conjuntiva do poder, uma tentativa de sublimação do arbítrio da violência natural, com seu séquito de tremores e terrores, tentativa que visa não propriamente dominar de fora, como o domador os leões, mas "superar" por absorção aquele "direito do mais forte", reclamado exemplarmente pelo Trasímaco da *República*, sujeitando-o às leis de uma dialógica conversora dos conflitos humanos em razão na medida em que do conflito faz surgir uma razão apreensível no meio de circulação/comunicação intra-humano que é a palavra (logos) eis o que se tornou lugar comum da historiografia filosófica. Resta saber se isto que foi história de gregos, não é só história, nem só de gregos. Resta afinal pôr à prova a observação de Hegel sobre a possível actualidade do antigo: as experiências passadas da filosofia seriam passado somente do ponto de vista da história da filosofia; como experiências humanas universais, isto é, como fases da consciência teórica dos entes humanos, revelam-se um *presente* revisível comum experiência de quem se decida a filosofar (e por isso a historicidade é uma dimensão constitutiva do trabalho filosófico).

Ora o que a emergência do "político" como condição de possibilidade e de necessidade da filosofia põe de manifesto é a abertura de um espaço de sociedade indispensável (logicamente) a que a interrogação filosófica se produza: um espaço virtual de comunicação partilhada, de dialógica de livres consciências, de trabalho comum sobre o comum discurso de todos os homens, que aponta à superação dos estádios de terrorismo da pura violência ou da opacidade enigmática de verdades sacerdotais, subtraídas, por definição, às ratificações de uma compreensão potencialmente acessível ao inteiro género humano.

Pensamos que o "núcleo racional" do projecto filosófico continua a ter a ver decisivamente com este "sentido" originário. A filosofia, como investigação e como proposta, só pode emergir e só pode circular (ainda que o não diga, ou até dizendo o contrário) no espaço de "l'homme de l'homme" (Rousseau), um espaço de cidadania virtual; e, no fundo, é desse espaço um dos possíveis testemunhos teóricos.

O que nos remete a outro nó crucial, que Fichte distendeu paroxisticamente até às últimas consequências, isto é, até aos limiares da sua inadmissibilidade: se tal se revela a razão do humano no homem, então a liberdade do sujeito que comporta a possibilidade de filosofar é seu pressuposto indefectível. Esta relação é biunívoca: só há liberdade num estado de razão porque só há razão em estado de liberdade.

Vale dizer: a acessibilidade ao discurso dialógico da filosofia implica que esse discurso seja falado por homens supostos livres, i.e., autónomos no pensar e no agir.

Visto o mesmo de outro ângulo, a filosofia constitui-se obrigatoriamente como tarefa *pública*. Por isso que as razões da razão filosófica se produzem de modo virtualmente ao alcance de todos os homens, as suas "verdades" não se podem configurar como enigmas oraculares entesourados por uns intérpretes autênticos, antes têm de se oferecer no plano da "comunidade cósmica" de que fala Kant na *Crítica da Razão Pura*, ou da "comunidade universal de consciências" designada no prefácio da hegeliana *Fenomenologia do Espírito*. A ciência filosófica é por força *cons-ciência*, uma ciência que se efectiva no entre nós e o connosco.

Donde que a filosofia não possa ser vista só como atitude individual de quem filosofa, ou esgotar-se em actos de virtude pessoal.

Pensamento em relação, o trabalho filosófico obriga-se a transcender a experiência de cada singular ente pensante, deferindo-se a uma objectividade racional *comunicável*, e porque comunicável, *colectiva*, e só comunicável e colectiva porque *objectiva*.

Insistimos: a filosofia não é – e não pode ser – a proeza individual de quaisquer magos do espírito; tem se afirmar como o dizer-se de um discurso que faz falar uma realidade meta-pessoal, embora somente se tome realidade se, quando e porque falada por pessoas. O que equivale a dizer que a filosofia se constitui como uma certa relação com os saberes teóricos e práticos emergentes com as epistemes, com as técnicas, com as práticas em geral, que faz surgir no discurso comum dos homens os valores de verdade e falsidade, de justiça e injustiça, de bem e de mal.

Verificação esta que – corolário do que acabámos de esboçar transporta, explícita ou implicitamente, duas pressuposições: que tais valores existem ou actuam para além da opiniativa cabeça de cada filósofo (são objectivos, portanto); que podem ser conhecidos, como conhecidos podem ser os fenómenos que qualificam, isto é, que pode haver (pelo menos como *problema*) uma ciência das coisas deste nosso mundo.

Eis-nos chegados por vias seguramente demasiado divagantes, mau grado a sua generalidade extrema, ao *quid* mesmo da filosofia. O tópico suscitado é agora este:

O exercício filosófico, hoje como ontem, *não tem sentido* se não puser em questão (isto é, se não puser como efectiva possibilidade humana) que no mundo dos homens (natureza, subjectividade, história) haja a virtualidade de uma ciência (*latu sensu*) das coisas desse mundo.

Mesmo as filosofias anti-científicas, ou as anti-filosóficas, têm de problematizar tal possibilidade; se a liquidam à partida não chegam a pôr-se como filosofias.

E, patentemente, aqui se inscreve a bifurcação moderna entre "ciências" (em sentido estrito) e '"filosofia". Mas se o que dissemos guarda alguma pertinência, então as raízes do "científico" e do "filosófico" mergulham no mesmo solo; a questão em aberto é *como* divergem (talvez também se podendo e devendo responder à questão: porque divergem?).

Não é, como assinalámos, arvorando a filosofia em supremo tribunal de justiça das instâncias científicas, para confirmar ou infirmar os seus resultados, nem, muito menos, como super-ciência capaz de fundamentar, hierarquizar, totalizar e valorar todas as demais manifestações teóricas e práticas. Não se vê que o trabalho filosófico possa suportar convincentemente semelhante ambição, sequer os combates de retaguarda contra o imperialismo cientista que são a ideia comteana da filosofia como "síntese das ciências", qual *holding* de gestão de uma multinacional dos saberes te-óricos e práticos (mas os centros produtores furtam-se a obedecer aos *diktats* desta direcção generalista), ou a variante mais modesta da "filosofia" como prestimoso mestre de baile interdisciplinar que põe as ciências a valsar umas com as outras (só que lhe não respeitam as vozes nem o compasso e persistem em dançar ao som das músicas que vão criando), ou o projecto, muito no espírito do empirismo lógico, de reservar ao trabalho filosófico um papel, definitivamente dependente, de lógica de unificação das várias ciências, o que na óptica, por exemplo, de Carnap, significaria a redução das linguagens a uma linguagem única (tentativa que não terá excedido as propostas programáticas de O. Neurath e de Carnap em finais dos anos trinta e que hoje parece, como comenta Tonini, falhada se não mesmo absurda «na medida em que cada ciência forma por si mesma e segundo as suas necessidades a sua linguagem, a sua metodologia, o seu sistema de conceitos; e modifica-os incessantemente».[8]

Assim o que resiste a tais propósitos, do lado das ciências, é a natureza mesma do trabalho científico, por isso que os seus processos de validação se mostram intrínsecos ao campo específico de cada ciência. Na verdade, desde que se reconheça que as ciências não são produtos ou resultados de uma dada racionalidade externa mas agentes *produtores* dos campos racionais próprios (como escreveu Bachelard "la science instruit la raison"), o espaço possível de uma fundação unificante retrotraída parece que só poderá encontrar apoio na hipótese do "sujeito puro" ou "transcendental" a funcionar como centro de imputação de uma eidética originária. Por aí se encaminharam as pesquisas de Husserl, mas com o êxito muito duvidoso que a própria profundidade do esforço realizado denuncia.

Do lado da filosofia, porém, e dentro do programa deste texto, interessa sobretudo chamar a atenção para o que a antiga pretensão metafísica recalcou e as actuais derivas tendem a camuflar.

Que a necessidade da filosofia se articula muito mais é prospecção, digamos crítica, do que se não sabe do que à sistematização do saber constituído.

Em suma, julgamos não negligenciável que se volte a levar a sério o sentido originário de "filosofia": uma procura de saber que, como procura, supõe sempre que se não possui o que é procurado. Sábios eram os sofistas, não os filósofos.

Aqui reencontramos o nosso tópico introdutório da força feita de fragilidades da filosofia, aqui nos cruzamos de novo com o inevitável Sócrates. O que dizia: quando convenço alguém de que é ignorante, logo as gentes imaginam que eu pretendo saber aquilo que ele ignorava. Ora não. O filósofo também não sabe. Só que é preciso saber não saber. Com efeito, o estatuto do não-saber é extremamente exigente em filosofia.

Há várias maneiras de o considerar (isto é, de o problematizar). Por exemplo: nada sei porque nada se pode saber. Ou porque o sentido se furta e tudo é enigmático, ou porque nada tem sentido e tudo é absurdo. São experiências limite dos desesperos

[8] Vide a comunicação «Logica Maior seu Materialis» no colóquio da Academia Internacional de Filosofia das Ciências, em *Science et Métaphysique*, Paris, Beauchesne, 1976.

da razão, experiências aptas a fecundar as catarses da arte mas que não convém à empresa filosófica, a qual justamente visa transcender esta desesperança radical.

Outro modo de o dizer é: nada sei de verdadeiro porque todas as verdades se equivalem. Optar por uma ou por outra vai do tempo, vai de um juízo probabilístico, vai do poder de sedução dos discursos. Esta modulação do sentido da filosofia segundo o paradigma racional da pesca à linha (Platão) ou como marketing dos produtos do pensamento também lhe não convém e foi mesmo contra semelhante sofística que se condensou o que hoje continuamos a chamar filosofia.

Então? Então, experimentemos:

"Nada sei de definitivo porque me obrigo a saber a fundo o que posso e devo saber e por esta prática dos saberes ponho a descoberto que saber é desconstrução criadora de novos saberes".

A fórmula será pedante, estilisticamente não vale grande coisa, mas devemos confessar que nos soa melhor. Muito melhor mesmo.

Vale por dizer que o "sentido", o destino da filosofia seria o de *descobrir*, e *disciplinar* esta sua descoberta, que não há saber absoluto, terminal, pré ou pós fundável, mas saber e verdade em construção. É por esta indefectível lacuna, por esta travessia não de desertos mas de povoados, que «nos abrimos à verdade» (Merleau-Ponty). Excelente fórmula: «nous sommes ouverts à la vérité».[9]

Abertos, não fechados com ela em casa, como teúda e manteúda de que o filósofo fosse reservatário, guardião e oráculo. Será então este o "sentido" ou alguma coisa do "sentido"?

Recapitulemos: o "sei que nada sei" filosófico obriga ao comércio no detalhe e em profundidade com aquilo que se pretende ter o direito de "não saber" sem aprofundar até aos seus extremos limites o que se pode saber, sem o que não é legítimo reivindicar que se sabe que se não sabe. Doutro modo, filosofar torna-se aquela actividade descuidada que caminha amando a vida, sem saber para onde vai, justamente apontada por Delfim Santos como o que não é filosofia; e não é com efeito.

Donde que se deva reconhecer que a ciência é constitutiva da filosofia (uma convicção teórica que, lembre-se de passagem, foi partilhada por pensadores de filosofia tão antagónicos como por ex. Popper e Althusser). Não já nos sentidos, por nós comentados, de conferir à filosofia poderes de soberania sobre as ciências, ou, inversamente, de a pôr ao serviço das tarefas científicas, mas no sentido de que a *ciência é a questão prévia da filosofia*. E aquilo que a ciência pode esperar da

[9] Vide *Eloge de la philosophie*, Paris, Gallimard, 1971, p. 47.

filosofia não é que esta lhe dite comandos legiferantes ou morigeradores mas que a filosofia filosofe.

O que pode significar isto? Pode significar, antes do mais, o questionamento crítico do trabalho que se faz nos campos científicos, não de fora, em nome de uma razão *supra omnes* pretensamente ditatorial, na realidade porém estéril, mas desde dentro, respeitando obrigatoriamente as exigências cognitivas intrínsecas do domínio criticado. Se falta a observância deste requisito do conhecimento de causa, não cabe estranhar alguma exasperação ou indulgente displicência no trato dos cientistas para com a filosofia.

Questionar criticamente as ciências significará pois uma actividade de clarificação activa que, ao testar as ciências, suscita, pela remoção das falsas certezas, a in-ciência como terreno novo de descoberta.

Demarcando com precisão – "clara e distintamente", diria Descartes – o inconcebível pelo concebível, competirá à indagação de tipo filosófico "*significar o indizível ao representar nitidamente o dizível*" como escreveu numa das suas fórmulas de infungível vigor Wittgenstein (*Tratactus*, 4.115). Assim o mesmo Wittgenstein – situando embora o enunciado em um contexto muito próprio e não inteiramente coincidente com o que sugerimos aqui – pôde adiantar a sua famosa definição do relacionamento filosofia-ciência dizendo que a filosofia não é doutrina, mas actividade que delimita nas ciências da natureza *o que é discutível* (*ibidem*, 4.112 e 4.113). Ou seja, dizemos nós, actividade que vai delimitando no campo das ciências o que não tem legitimidade de ciência mercê do processo de clarificação do que é (vai sendo) ciência.

Filosofar pode e deve significar também uma meta crítica da própria crítica filosófica, no sentido que mais recentemente foi explorado sobretudo pela chamada "escola de Frankfurt": uma radicalização da crítica dos conhecimentos que tem de se desenvolver como "teoria crítica da sociedade" (Habermas)[10], na medida em que se não circunscreve a pôr aos conhecimentos teóricos e práticos a questão dos seus limites ou da sua possibilidade, e questiona o *quem* critica, o *donde* se critica e o *como* de os objectos da crítica se apresentarem sob modos de produção e reprodução que (im)possibilitam a crítica.

É este movimento de "meta crítica" que permite abrir no argumento filosófico a dimensão ético-política da própria génese e inserção social dos procedimentos do conhecer e do agir (uma dimensão que, sabemo-lo todos, não é propriamente a de santa paz do Senhor) e, em *feed back*, deve fazer retroagir o trabalho crítico até ao interior mesmo dos dispositivos sociais, institucionais e metodológicos de produção

[10] Vide o notável «balance raisonné» de G. Kortian, *Métacritique*, Paris, Minuit, 1979.

dos conhecimentos (o que, sabemo-lo também todos ou temos a obrigação de saber, não desvenda mundos de tecnicidade neutra, depois da sua jogada expectantes, à beira da mesa, em estado de excitada inocência científica, que os *croupiers* da roleta política anunciem o número da bomba de neutrões ou o que faça cair o maná das energias limpas e baratas; a verdade é que, muito pelo contrário, as estratégias de produção dos conhecimentos são, de ponta a ponta, mais do que sobredeterminadas, *atravessadas internamente* por orientações referidas aos grandes conflitos humanos, os quais, se não são na origem ciência, *sabem fazer-se ciência*, e se acerca disto houvéssemos de concluir que a filosofia não tem nada a dizer, melhor seria baixá-la já à terra, sem estar inutilmente à espera que o seu adiado cadáver teórico se desfaça em pó).

Se filosofar tem alguma coisa a ver com este programa de exigências, então a filosofia, longe de pairar sobre o mundo tal conhecimento majestático que dita aos homens e às coisas como são ou deveriam ser, é apenas um entre outros dos modos de pôr à prova as faculdades da razão humana onde quer que homens e coisas vão efectivamente agindo e sendo. Só que um modo amplamente intrometido ou, se preferirmos, comprometido: em todos os recantos teóricos e práticos da experiência humana, a filosofia pode espreitar. Espreita nas instâncias de relacionação dos homens com o mundo material que os envolve e constitui, espreita nos lugares da humana “sociabilidade insociável” como espreita nas zonas de formalização e convalidação do pensamento que assim se produz e assim se questiona, e não deixa de espreitar nos bastidores do que suporta a possibilidade de todas as encenações de “l'homme de l'homme”: os modos de se produzir e reproduzir a sua dimensão política; pois aquém da dimensão política não é concebível sequer a exigência filosófica: “ao princípio é a dialéctica, porque ao princípio é a cidade”, escreveu Sichirollo falando dos gregos. Isto é, de nós.

Esta recordatória define obviamente um arco de tarefas muito alargado. A filosofia aparece-nos como o decatlonista que tem de ir a todas as provas, por dever de ofício. Não para tentar bater os *recordes* de conhecimento dos especialistas. A sua *performance* hoje só pode ser outra: é testar esses recordes, aferi-los, contar os pontos, «sopesar tudo» diria Montaigne.

O que obriga a recolocar em novas bases a difícil questão do enciclopedismo do trabalho filosófico. Se como deixámos assinalado não parece que tenham futuro projectos enciclopédicos que pressuponham na filosofia a competência de tribunal superior das pluri-instâncias do real e do conhecimento, ou o poder soberano de fundação e unificação dos outros modos de saber, já será legítima a ambição filosófica de inscrever as suas questionações críticas numa perspectivação “macroscópica”[11] que lhe permita reconhecer as interacções da natureza e da cultura, reconstituindo o que em linguagem hegeliana se diria os “universais concretos”: redes de acção e retroacção dos resultados da teoria e da prática. Como comentou um filósofo da ciência, Mario Bunge, os grandes continentes da cultura intelectual contemporânea estão ligados «por istmos onde o tráfego é intenso: cada ramo da cultura encontra-se em interacção com todos os outros; o contorno do todo assemelha-se a um trevo de quatro folhas».[12] Assim, a exigência crítica e meta crítica pode e deve operar num contexto macroscópico não de unificação hierarquizada mas de comunicação recíproca, em igualdade de direitos.

Tratar-se-á então de um novo enciclopedismo filosófico que, conforme o programa possível da clarificação activa, não procura a acumulação ou a hierarquização organicista dos conhecimentos, antes se propõe fazer circular a comunicação entre as macro-logias científicas e tecnólógicas, investidas de dentro pelos diluentes micro lógicos da crítica. Um enciclopedismo que, segundo o testemunho de Edgar Morin, pratique o reconhecimento de que «la seule connaissance qui vaille se nourrit d'incertitudes; et la seule pensée qui vaille se maintient à la température de sa propre destruction». É interessante recordar, como, situado numa perspectiva e num contexto teórico absolutamente distintos dos de Morin, um autor português pôde há um bom par de, anos convergir, por antecipação, em posições análogas quanto à caracterização do trabalho filosófico, ao escrever, sequencialmente à sua proposta de diferenciação entre o conhecimento como prática científica e o tipo de questionações suscitadas pela investigação filosófica, que hoje uma filosofia que se encare sem ilusões sabe que o seu discurso não é da ordem do conhecimento mas da ordem do *reconhecimento* e da *prospecção*.[13] Competiria, pois, ao trabalho filosófico proceder ao reconhecimento crítico e meta crítico das obras do conhecimento, nas

---

[11] Usamos o termo na acepção que o biólogo Joel de Rosnay popularizou (*Le Macroscope*, Paris, Seuil, 1975, tr. port. Ed. Arcádia): se o infinitamente pequeno é observável pelo instrumental microscópio e o infinitamente grande pelo telescópio, a apreensão do infinitamente complexo requereria um instrumento mental “macroscópico” capaz de tornar visível o invisível (pois, com efeito, todos os sistemas são insusceptíveis de observação directa: ninguém vê, excepto com os “olhos da alma”, um Estado, uma cidade, uma ordem jurídica ou a balança de pagamentos, como ninguém “vê” o tempo, a informação ou a energia); o investigador de realidades sistémicas tem de criar o aparelho conceptual que lhe permita reproduzir os sistemas complexos a partir dos seus resultados, i.e., a partir da economia de sinais que manifestam a realidade dos sistemas de que aqueles resultados são resultado.

[12] A imagem é tributária da classificação “quadri-continental” dos grandes sectores da cultura intelectual que Bunge propõe: humanidades (filosofia incluída), matemática, ciências, tecnologias (as artes, os mesteres e a religião não seriam domínios puramente intelectuais, posto que os respectivos produtos se não deixam apreender em conjuntos proposicionais). Vide *Science et Technique contemporaines*, em *Science et Métaphysique*, ed. cit. supra.

[13] J. Esteves da Silva, *Para uma teoria da história. De Althusser a Marx*, Lisboa, Diabril, 1976, 2.º v., p. 157 (sublinhados nossos).

suas imbricadas dimensões epistemológicas, metodológicas, éticas, políticas, e, do mesmo passo, prospectar o futuro do (ainda) desconhecido, delimitando o "indizível" pela rigorosa clarificação do "dizível", tarefa nunca encerrada nem imune dos riscos da verificabilidade que vai reabrindo no ser do saber a possibilidade do não-saber. Talvez também porque, como se condensa num belo aforismo de Jaspers, o não-saber seja a origem do ter-de-querer.

É tempo, e mais que tempo, de concluir. Que nos sobra então como o "sentido" desta filosofia sem ilusões (que é todo o contrário de uma filosofia desiludida)?

Reiteremos para balanço os pontos nodais da topografia aqui esboçada:

(a) hoje como sempre, uma conduta de questionação que aplica os corrosivos lógicos da crítica às grandes cristalizações da tradição, da autoridade, do "constituído";

(b) não uma qualquer questionação, mas que seja efectivamente lógica e efectivamente crítica;

(c) criticar o conhecido significa conhecê-lo, e não só; significa também forçar os seus limites e os limites do próprio processo de crítica até às fronteiras do desconhecido e das condições de possibilidade do acto de criticar, inscrevendo estas exigências numa perspectiva intercomunicante, não para as congelar em novas necessidades mas para abrir ao futuro as experiências do passado de que é feito o nosso presente; se em muito do que somos e fazemos "le mort saisit le vif", o trabalho da filosofia, que também somos e também fazemos, deve obrigar-se a ser "le vif qui saisit le mort".

Logo, a tarefa da filosofia não é tanto esclarecer a inteligência, mas contrariar a vontade: o que impede a maioria de ver as coisas óbvias é *que não quer ver* (Wittgenstein).

Donde, o estatuto precário do filósofo, esse instável personagem da cultura, no qual «concorrem inseparavelmente o gosto da evidência e o sentido da ambiguidade» (Merleau-Ponty). Com efeito, o filósofo apresenta-se como homem de lei e homem de transgressão: de lei, porque o seu espaço é o da razão, e a razão é lei como a lei razão; de transgressão, porque, opostamente ao inolvidável anti-filósofo português que dizia: "Nós não discutimos a Autoridade" (e punha maiúsculas na voz), o filósofo discute sempre. Como não há lei que não tenha emergido da discussão, ele sabe, ou pressente, que lei alguma é indiscutível.

Digamos ainda que se este é o sentido da filosofia, obviamente que tem de alijar dos seus objectivos a pretensão científica. Pois o espaço que a ciência procura preencher é onde se não transgrida: previsibilidade e certeza de resultados são os objectivos a que o trabalho científico aponta.[14] De resto, e como tem sido frequentemente ventilado desde quadrantes ideológicos diversos, quando quisesse definir-se como “ciência” a filosofia arriscar-se-ia a configurar o insólito de uma ciência sem objecto. É que em rigor não há problemas filosóficos. Tal como Russell dizia que o objecto das palavras é significar matérias que não são palavras, o destino da filosofia é filosofar sobre matérias que não são filosofia. A questionação filosófica alimenta-se do que Popper designou expressivamente por “situações problema”, exteriores à filosofia: situações científicas, lógico-matemáticas, estéticas, éticas, políticas … (Postando-se no seu peculiar “quadro de mundo” Wittgenstein diria que «a tarefa da filosofia não é criar uma nova linguagem ideal mas clarificar o uso das nossas linguagens».) Os chamados problemas filosóficos não são produtos ideais de um novo conhecimento originário mas situações extra-filosóficas que batem à porta da filosofia para que as reconheça como problemas que interessam à dupla intencionalidade, a crítica e a macroscópica, de que releva o trabalho filosófico.

* * *

Antes de encerrar, consinta-se-me ainda um quase posfácio. Provavelmente a ideia mais repisada ao longo do guião foi a de que o sentido do exercício da filosofia não aponta hoje para os horizontes de hegemonia e de fechamento problemático que caracterizaram topologicamente o filosofar de tipo metafísico. É uma tradição que faz

[14] Aponta é realmente a expressão inspirada numa passagem de Popper: «o alvo do cientista não é descobrir uma certeza absoluta, mas teorias cada vez melhores susceptíveis de submissão a testes cada vez mais severos e conduzindo-nos deste modo sempre a novas exigências esclarecedoras». O progresso das ciências aponta, portanto, não à acumulação de “certezas” mas à construção “desconstrutiva” de patamares satisfatórios de certeza. Porém, a filosofia se é com isto que também trabalha, não é exactamente a isto que “aponta”. Quanto à previsibilidade, queremos referir-nos aos “factos” ou resultados experimentais do trabalho científico, sem esquecermos que desde a revolução quântica ganharam direito de cidadania teórica, mesmo na ciência da natureza por excelência que é a física, e são passíveis de experimentação, uns “objectos” que, ontologicamente, "formam um mundo de potencialidades ou de possibilidades mais do que um mundo de coisas ou de factos» (Heisenberg). Deve no entanto dizer-se que a “previsibilidade” no mundo dos factos não foi enfraquecida, antes prodigiosamente reforçada por aquela indeterminação à escala do que Einstein designou por campos fracos (às vezes irreflectidamente transferida para outros “campos” – não por cientistas, bem entendido – talvez devido à irresistível tendência a extrapolar, em termos de más teorias gerais, a área da pertinência de boas teorias particulares, o que Wittgenstein justamente identificou, ao jeito de autocrítica, como uma das doenças do “espírito” – a «tendência para generalizar o caso claro», a exigir terapia filosófica).

Aliás os problemas que a física quântica suscita realmente em sede filosófica andarão mais à volta do “núcleo” de paradoxos que Russell condensou no seu livrinho de divulgação sobre a teoria da relatividade: verificar-se que, curiosamente, o incontestável aperfeiçoamento do raciocínio humano é correlato não de uma maior mas de uma menor capacidade de provar factos (situação ilustrável em outros domínios que não só da física); que é surpreendente como sabendo extremamente pouco os homens consigam conhecer tanto; e mais surpreendente ainda que tão pouco saber lhes proporcione tamanho poder.

parte integrante dos percursos históricos da filosofia mas que hoje – repetimos: hoje; por amanhã não respondemos – parece exaurida de fundamentação e de fecundidade.

Destacando-se desta tradição, o *universum* filosófico tal se actualiza tende a fragmentar-se como realidade pluriversal, animada por um *conatus* de possibilismo multipolar, que traz à lembrança o *eros* platónico, descompressor enquanto carência de ser, desejo, apelo ao futuro, do concentrado da *anamnésis* em que condensava recordatoriamente a visão premundana da ideia.

O que gostaria de acrescentar como última sugestão de debate é se esta verdadeira inversão de sentidos na trajectória da filosofia não será atravessada, também ela, e como tudo que se produz "filosoficamente", por uma envolvência meta-filosófica. Se não denuncia sintomaticamente o que Hegel talvez chamasse o "espírito do tempo" (aí onde os problemas se anunciam em situação da subversão ou rotura).

Durante séculos a filosofia terá sido a tentativa porfiada de erigir uma ordem ideal superadora do caos real de um mundo a contas com os limites e ameaças da natureza incontrolada, presa também dos furores e terrores advenientes da contingência da acção humana. Contra as Diferenças agressoras de um Existente fora de controlo, experimentava-se a necessidade de afirmar o Mesmo apaziguador da razão. Portadora privilegiada desta Paz Ideal, a filosofia comportou-se multisecularmente como o Estado segundo Hobbes: era o pânico feito razão.

Mas hoje o pânico é outro. Confrontada ao balanceio entre domínio efectivo das forças naturais, convertidas em instrumentos de produção pela ciência e pela tecnologia contemporâneas, e destruição planetária, face à decorrente "objectivação" dos actos da história, uma "objectivação" dilacerada e dilacerante de que é tecido conjuntivo a "lógica" unidimensional do processo de industrialização do mundo, a contas com estruturas de hierarquia e de autoridade interiorizadas pela "cientização" disseminada até ao cerne mesmo da matéria de que se produzem as condições em que os homens vivem a sua vida, prisioneira, enfim, de toda esta metafísica realizada da qual Hegel traçou, em retrospectiva de antecipação, o recitativo épico e o epitáfio especulativo, algo de tão resplandecentemente mortuário como *Os Lusíadas* das epopeias da razão, a filosofia passou a tentar abrir, na ordem inexoravelmente real de um racional insatisfatório, as fendas de libertação que, logo após Hegel, já tinham começado a reclamar, cada qual à sua maneira, Feuerbach, Marx, Nietzsche. Procurou-se desde então, dar espaço aos direitos ideais da Diferença na envolvência asfixiante da Mesmidade.

Foi o que justamente se designou por decomposição do sistema hegeliano. Mas talvez por se não levar verdadeiramente a sério o trabalho filosófico, nem sempre se atendeu a que, mais do que um desmantelamento teórico, se estava a sinalizar os desastres humanos do mundo de que Hegel se constituíra o fiel leitor.

Sacudida pelo sopro da "era das revoluções", sob a iminência de apocalipses vários, a ruína do que Luckaks chamou a utopia napoleónico-prussiana de Hegel atinge-nos longe e fundo. Do pânico feito razão transitou-se para a razão feita pânico, e o futuro não veio invalidar nem os temores, nem as denúncias premonitórias das grandes vozes críticas que se fizeram ouvir no meio dos escombros da suma hegeliana.

Entre a noite e o nevoeiro das grandes cremações humanas, irradiando das manchas de horror da fome, da exploração e do sangue, sobre as quais adeja, a ocidente e a oriente, o imponderável pavor termonuclear, o que fulgura com metálica nitidez é que, mais do insustentável se tornou insuportável admitir como garantida a reconciliação especulativa do "real" e do "racional", num mundo que já fez a experiência do real da razão se manifestar como o inferno absoluto, perfeitamente "civil", do extermínio contabilizado, carimbado, enquadrado urbanisticamente com cuidados de espaço verde, e em que a razão do real põe a pairar, na terra dos homens, o Nada espiritualizado dessa bomba tão elegantemente inteligente que é a bomba de neutrões, talvez a primeira grande novidade metafísica pós Hegel.

Se a filosofia pôde ser secularmente a arma de contra-terror da razão, arrisca-se a perder pertinência num mundo que "supera" hegelianamente todos os terrores pelo horror absoluto da Indiferença. O princípio de individuação, que emergira e se afirmara no contraponto das agressões da violência e da morte, dissolve-se como os fumos saídos das artesanais chaminés nazis, quando, assinalou-o há tempos Adorno a propósito da situação problema para a filosofia que se chama Auschwitz, os homens podem ser expropriados até do mais precário e mísero que lhes cabia de humanidade que era o de poderem viver a sua morte. E ainda assim a artesania de terror nazi prestava aos homens a homenagem de se obstinar em destruir neles o núcleo último da dignidade humana. A tendência hoje, no jogo de ameaças dos poderes, é para prescindir desses derradeiros resíduos de Romantismo; com efeito, para quê perder tempo com tantos cerimoniais de "persuasão", quando se pode pôr na mesa a violência absoluta de fazer desaparecer o planeta vezes *n*?

Neste ambiente de fim de partida em que o problema político nº um se tornou a sobrevivência da espécie e a margem de cidadania quanto a essa questão vital ameaça consistir em se esperar probabilisticamente que os vários grandes timoneiros que por aí se produzem nos "vídeo" televisivos não sejam tão imbecis ou propensos à loucura homicida como aparentam ser, as angústias da razão filosófica, a sua recusa dos poderes da Totalização, talvez indiciem que a racionalidade do real e o real da racionalidade alcançaram o limiar crítico das suas astúcias, e que convém mudar rapidamente de razões e de astúcia se se quiser fugir ao xeque mate. Se ainda se puder. A maneira única de salvar a razão, esforço sinónimo de salvar de facto o mundo dos homens, é radicalizar racionalmente a crítica das obras irracionais da razão e das razões da irracionalidade. A tarefa já não aponta a reconciliar razão e mundo, mas a uma exigência bem mais profunda e mais grave: superar os conflitos da razão consigo mesma. A isso pode ser chamada a dar o seu contributo a filosofia. Dar contributo, insistimos. Não se lhe peça muito mais, porque se pedirá em vão.

Talvez então ela sobreviva como um dos pontos de fuga consentidos ao pensamento humano para experimentar o que alguém chamou o princípio da esperança. Foi algo que esse alguém (o desesperado filósofo da esperança Ernest Bloch) soube formular belamente: a razão não pode florescer sem esperança, mas a esperança não pode ser dita se faltar a razão, nenhuma outra ciência senão esta pode ter futuro, nenhum futuro outra ciência. É qualquer coisa de que esperamos se revele um pouco menos fugaz, um tudo nada mais consistente do que o acenar de mão do desconhecido que Joseph K vislumbrou ao longe quando, no termo do processo, é convocado a morrer burocraticamente “como um cão”.

The pathic/haptic relationship in philosophy of cinema. The case of *Doubt* (John Patrick Shanley, 2008)

Giovanni Scarafile
(University of Salento, Department of Philosophy)
giovanni.scarafile@unisalento.it

A passage in the early pages of the *Treatise on Argumentation* by Perelman-Tyteca is of particular interest for my purposes. Perelman in fact talks about the need, not only as a pre-condition for the launching of an argumentation in the strict sense, to set up a «contact between minds»[1] (§2), adding that «It is not enough to talk or write, one must also be listened to and read»[2] and that «knowing the audience can be seen independently from knowing the ways to influence it, in fact the issue of the kind of audience is linked to that of its conditioning»[3]. In §10 he also recalls that: «argumentation is successful if it can increase this intensity of identification so as to cause the desired action among the listeners»[4]. These words of Perelman's remind us of the words used in *Rhetoric* by Aristotle to introduce the question of the style of argumentation: «it is not enough to know the arguments one is to expound, but one must expound them *appropriately*»[5]. What type of component are these passages from Aristotle and Perelman referring to? When looked at more closely, they give rise to the emphasis on a component related not just to the rational aspect of the "content" of the process of argumentation, but rather to the emotional component. It is a necessary and sufficient condition for the augured *contact of minds* and therefore for argumentation *tout court*, as Perelman himself points out: «The contact between the speaker and his audience does not just involve the pre-conditions for argumentation, but is essential for its whole development»[6]. Therefore, along with the structure and type of argumentation, we must envisage a further level, not subordinate to the first,

[1] Perelman-Tyteca, 1982, 16.
[2] Perelman-Tyteca, 1982, 19.
[3] Perelman-Tyteca, 1982, 25.
[4] Perelman-Tyteca, 1982, 48.
[5] Aristotle, *Rhetoric*, 1403b.
[6] Perelman-Tyteca, 1982, 20.

and contributing to successful argumentation. My thesis is that the cinema is an excellent lens through which to see the working of such a process, which I would here like to call "pathic". Explaining the meaning of the pathic and how it is related to the haptic, which refers to the habitability of something[7], is what I intend to do in these brief comments. For a start, I would like to just mention the sense of the pathic, which I feel is magnificently summed up in these words by Maria Zambrano: «Passion alone frightens off truth, which is alert and agile enough to escape from its grasp. Reason alone is not able to surprise the wildlife. But passion and reason together, with reason launching itself with impassioned energy only to stop at the right moment, can capture the naked truth without damaging it. [...] It would be good to come to discover the soul in those forms in which it was seeking to express itself alone, forgetting for the moment what the intellect had to say about the underlying soul. To reveal the reasons of the heart that the heart itself has discovered by exploiting its state of solitude and abandonment»[8].

The 'added signification' of the cinema: Kutusov and Canudo

The attempt to clarify the relation between pathic and haptic will be made by considering one film in particular, John Patrick Shanley's *Doubt* (2008), showing that in it certain factors connected to the pathic component I mentioned earlier are absolutely decisive. I think it is important to recall some basic points in film language theory. It is well known that in every film two elements can be found. The first, and easiest to grasp, concerns what we could call content (the screenplay, the narrative plot), while the second concerns the style used to try to put the content on the screen. In a film these elements are jointly present and I am separating them only to make my train of thought clear. Technically speaking, with reference to these two aspects, the way a film works is not different from a novel. Does this then mean that there is no specific difference between a film and a novel? The question is obviously rhetorical, since not only does such a difference exist, but it is in fact the beating heart of film language. It may be useful to recall one of the first places where this difference was manifested. I am referring to the famous experiment carried out by Kulesov, narrated by Pudovkin in *The Seventh Art*: in a cinema, before a chosen audience, three different sequences of images were projected: the first was the photo of an actor with an impassive expression; the second showed a woman's dead body; the third, a bowl

[7] Cf. Hatwell, Streri, Gentaz, 2003; Hatwell, 1986; Heller, 1991; Lhote, Streri, 2003.
[8] Zambrano, 2001, 19-20; 30 (my translation).

of soup. In the audience's perception, the actor's expression changed according to the order in which the photos were projected, changing from sad to happy depending on whether it was followed by the photo of the dead woman or by that of the bowl of soup. The Kulesov-Pudovkin experiment showed that the projection in a certain rhythm of the same images, or we could say of the same content, causes an increase in signification: the meaning of identical content can vary according to the way it is shown. Starting from that initial evidence, we can say that in a film the skill of the director lies in the way he or she is able to "steer" this added signification. Having recalled the cinema's force of expression in the way it is manifested, I would now like to let you hear one of the first witnesses of the birth of the cinema, the Italian Ricciotto Canudo, briefly showing three aspects of his theoretical stance:

1) For Canudo, who lived in the early 1920s, the cinema was an absolutely modern art, suited to the new era. It was Canudo who coined the neologism *écraniste* to refer to the artist who gets his bearings from the new art[9]. Canudo distinguished between the arts of time (music, poetry and, later, also dance[10]) and the arts of space (architecture, sculpture, painting). The former are mobile rhythmic arts, the latter immobile and plastic. The cinema has to be placed at the top in that it manages to reconcile both types of art and is therefore spatial-temporal «total art», suited to the rhythmic dynamism of modern culture;

2) Cinema's strength lies in the capacity, embodied in the *écraniste*, to involve not only intellectuals but also the broader public: «it is the desire – he wrote – for a new Celebration, for a joyful new *humanity*, taking place in a show, in a place where people come together, where they achieve, to a greater or lesser degree, the annulment of their isolated individuality»[11];

3) The third aspect comes from the following passage, which I will quote in its entirety: «We are witnessing the birth of this sixth art. Such a statement at a twilight time like ours, still poorly defined and uncertain like every period of transition, is repugnant to our scientific mentality. […] *only practised eyes with the will to discover the original or invisible signs of beings and things can find their way amidst the obscure vision of the* anima mundi. However, the sixth art prevails on the restless, searching spirit. And it will be the superb reconciliation of the Rhythms of Space (the Plastic Arts) and the Rhythms of Time (Music and Poetry)"»[12]. Canudo's words mention a particular "vision", which is triggered not independently from the establishment of a particular attitude on the part of the viewer. For this attitude to

[9] At the same time, Delluc with similar intentions was coining the term *cinéaste*.
[10] This is why at first Canudo talked about cinema as the new "sixth" art.
[11] Canudo, 1908, 3.
[12] Barbera, Turigliatto, 1978, 15 ff, my italics. See also, Mossetto, 1973.

emerge one must be practised in capturing "the original invisible signs of beings". Summing up: Canudo grasps a specificity of the cinema that cannot be linked to any of the pre-existing arts; this specificity enables the audience to be more involved; both these factors are then attributed to a modality which, properly speaking, *happens* in the viewer when there is a manifest willingness to go beyond the visible. Both in Kutusov and Canudo, those we can consider witnesses of the birth of the cinema, we see an emphasis on the *pathic* aspect. This proves to have a very strong influence, though it does not really belong to the narrative dimension of the cinema. What is the role of the pathic component when we are talking about a film like *Doubt* in which the role of the content (dialogue, plot, narrative) is highly significant? Will this film confirm my hypothesis?

The contrast between pathic and haptic in the film Doubt

In *Doubt* the story is set in 1964, in the Bronx, in the St. Nicholas Parish College. 1964 was the year after Kennedy's assassination, and American society was still experiencing the trauma of loss, but it was also the year when the innovations of the 2nd Vatican Council were announced, with the liberalisations of the Church, which was no longer afraid to go out into the world. While this was the background to the story narrated in the film, it was the words uttered during a sermon by Father Flynn, played by Philip Seymour Hoffman, that acted as the catalyst of the whole story. «I want to say to you: Doubt can be a bond as powerful and sustaining as certainty. When you are lost, you are not alone»[13]. Doubt – says Father Flynn – can be a shared bond as reassuring as certainty, thus sanctioning this aspect of the human being, often considered to be the inevitable synonym of error. In actual fact, at least in some circles, one may be led to see doubt as a fleeting aberration, a shadow to be quickly left behind. After all, don't we say that our decisions are actually decisions when they "leave not a shadow of doubt"? The scene in which Father Flynn delivers the sermon also enables us to understand the characteristics of the film's other main character, Sister Aloysius, played by Meryl Streep. It is in fact during the sermon that Sister Aloysius is shown methodically preventing and harshly restraining the lack of attention of some children sitting in church. The first scene of the film is in this sense a synecdoche, that is, it manages to convey to us the entire film based on the contrast between an attitude of openness to life embodied by the young priest and an attitude

[13] Script of the film *Doubt,* 8. The script is available at: miramaxhighlights.com/uploads/Doubt_Script%5B1%5D.pdf

of closure and defence of the hierarchy embodied by Sister Aloysius. Between these two very different figures, there will appear the young and perhaps over-naïve Sister James, played by Amy Adams, in appearance very easily influenced. Sister Aloysius embodies a very common attitude, which can be called insular selfsufficiency: at times we are so deeply rooted in our positions that we do not even want to see beyond. Not only does everything seem to be in our possession, even the criteria of truth and falsity, but we have operated a form of absolute selfjustification on the removal of the filter towards the world. At that point, the result is that we are inevitably rooted in our own self[14]. As the film's narrative goes ahead one is led to doubt the correctness of Father Flynn's attitude to Donald Miller, the only African-American student in the school. When the priest is accused of molesting the boy, the clarification that follows is the stage on which the protagonists' attitudes to life are played out.

> Flynn: [...] You had a fundamental mistrust of me before this incident! It was you that warned Sister James to be on the lookout, wasn't it?
> Sister Aloysius: That's true.
> Flynn: So you admit it!
> Sister Aloysius: Certainly.
> Flynn: Why?
> Sister Aloysius: I know people.
> Flynn: That's not good enough!
> Sister Aloysius: It won't have to be[15].

Now, undoubtedly the position of Sister Aloysius is important, when she claims she is sure of the accusations against the priest; of clear importance is also the position taken by the priest, who while defending himself recalls the force of doubt against the nun's adamantine certainty; and it is clearly important that Sister James' gaze is awakened. In all this, there are elements of enormous interest, thanks also to the actors' exceptional performances. It seems to me however that focusing exclusively on these aspects of the content, though they are very important, will allow us to only partially grasp the specific nature of the film. In the confrontation between Father Flynn and Sister Aloysius, what really matters is the position the viewer must adopt *to get into* the film. From this particular perspective, the very distance that separates us as viewers from the story told in the film, set in 1964 in the Bronx in the St Nicholas Parish college, slips into the background. Inevitably, the dialogue in the film has a certain strength and eloquence. But the contrast between the two main protagonists shown in the film does not only depend on the dialogue's narrative

[14] A further form of this attitude can be found in the film *The Visitor* (USA 2007) by Thomas McCarthy.
[15] Script of the film *Doubt,* 82.

strength. Assessing Father Flynn's behaviour, deciding whether or not he is innocent, and assessing the truth of Sister Aloysius's accusations cannot be done by staying on the semantic level within the system created by the clash of the two protagonists. To explain this step, concerning the option of choice triggered by/in the viewer, we need to refer to the phenomenology of choice. Choosing is a dynamic process. The choice is made when one is able to make a distinction, to identify a gap. What is chosen is what one has managed to separate from what remains unchosen. In this sense, there is, in every choice, a selection. It is no accident that the Latin verb *eligere*, composed of *ex* and *legere*, takes the meaning of "choose between". The propension, or the start of a choice, is a gradual process, which is asserted by degrees insofar as one element that has become decisive is identified and distinguished on a background of uncertainty. Choosing means tending to favour a certain option. However, even if the "most certain" choice (if one can say that), marks a distancing from what one has decided against, it can never be transformed into a total rejection of the possibility of doubt, even about the question on which the original choice was made. To make this clearer, on the question of choosing, doubt has a structural and preparatory role and this remains as a constant spur and a constant source of verification of the rightness of the choices made. Choosing in favour of Father Flynn or Sister Aloysius can be done insofar as the viewer, for whose sake the dialogue between the two protagonists is performed, is able to relive, or to experience the theoretical positions represented by the two protagonists. So as viewers, watching the representation of the dialogue between doubt and choice, we discover how easily one can be identified with one's prejudices and how difficult it can be to distance oneself from that which seems easy and natural to believe. It is this aspect of the film that allows us to recall the strength of argumentation that, being a union of the narrative aspect and the pathic aspect, is perfectly embodied in the cinema in general and in the film *Doubt* in particular. At this point we cannot avoid mentioning a comment by Hugo Münsterberg, «The deviation from reality begins with that resolution of the continuous movement which we studied in our psychological discussions. We saw that the impression of movement results from an activity of the mind which binds the separate pictures together»[16]. As Dudley Andrew pointed out in his critique of Münsterberg's theory, «If a part of nature or a piece of drama is to function aesthetically in a film, it does so, he states, by submitting to the poetics of the screen, forming a new object, a film object of contemplation. For Münsterberg this is a mental object, an object which flows and finds its rest according to the laws of the mind. Here we can recognize the coincidence of his aesthetic theory and his psychology of film. The belief that film's

[16] Münsterberg, 1916, 67.

only claim to aesthetic validity lies in its transforming of reality into an object of imagination has its echo in the psychological claim that film in fact exists not on celluloid, nor even on the screen, but only in the mind which actualizes it by conferring movement, attention, memory, imagination, and emotion on a dead series of shadows»[17].

I have just written about the viewer's capacity to relive what happens on the screen. This reference to such an aspect of experience will now enable us to clarify the meaning of the reference to the pathic.

The pathic

Two separate, interacting dimensions converge in the concept of experience: it is in fact the knowledge and the practice of things acquired in trials made by ourselves and others. The Greek term ἐμπειρία indicates not only experience proper, but what is obtained by *passing through.* In the Latin form of the term, the semantic nucleus refers to the term *ex-perientia,* in which the addition of 'ex' to the verb *perior* signals the completion of the passage through, what remains after it has been tried. Getting through and the indispensable nature of the trial: this is how we can sum up what the etymology tells us about *experience.* Two separate but interacting dimensions can be identified: a) the first phase, sensitive, antepredicative, primary b) the second phase, intellectual, predicative, the conceptual organizer of the material presented. These dimensions can however be indicated with different terms: in the first case as πάθος, *affectio, Erlebnis* and therefore life lived, sense – we have entered the realm of feeling, of pathicity; in the second case, as ἐμπειρία, *experientia, Erfahrung* and therefore experience in the sense of the constitution of an object, the ideality of a representation, signification. In *lived experience* there is the sense of a new gnoseological approach to psychological facts: approaching life with life. This is possible only if the living thing is considered in a vital act which lets him re-live (*Nacherleben*). The other is therefore an event. If intentionality, in the sense of aiming at a target, constitutes a way of relating logically, then being taken as a target (as in the case of pain), the root of passive subjectivity, embraces all mankind. It can be rightly raised to become not merely an anthropological, but an ontological, dimension. On this, Masullo acutely observed: «This is actually the condition not only of emotion but of any lived experience. Not only is there no truly human pleasure or pain, reasoning or action, imagination or memory, albeit hidden away but always

[17] Dudley, 1976, 24-5.

ready to spring out and make itself felt in the various moments of life, that does not bring with it "the astonishment of the manifestation of the self" and "the anguish of being affected by events for no reason". Every occurrence affects me, *just* me, without me knowing why, just as I do not know where this 'me' comes from and where it is going, or even why it has been *just* my turn to be affected»[18]. The viewer is therefore not only the person witnessing the performance but in a certain sense the one taking part in it, though at a distance from the screen. The cinema is consequently not only a moment of escape or a pre-text, but is endowed with the extraordinary expressive power to project us towards the thing, as Gadamer confirms with reference to the image: «The more one immerses oneself in it, the more one is in touch with what is being represented»[19]. Watching two characters in the film heatedly discussing certainty and doubt is not a static operation lacking consequences. From this angle, we could in fact say that the success of the film lies in the capacity to uproot us from our distance as viewers and to bring us to question ourselves, not only on an abstract level of argumentation, but on a pathic level, about the meaning of what we are seeing. We are thus authorised to enter the film, to "inhabit" it. And it is here that the pathic is converted into haptic: it is as if we too were in that room where the clash between Father Flynn and Sister Aloysius is taking place. As Giuliana Bruno writes, «the cinema is an imaginative architectural toy, a house of "raptures". It is a machine that expands our capacity to map the world by extending our sensory system. By confronting us with our environment, the cinema offers touching visions and at the same time it explores the relation between movement and emotion, the sensual space of *emotion*. [...]. The cinema has given modern man a new *tactic* to get his bearings and to give a "sense" to this movement, which includes the movement of the emotions. [...]. Being the domain of images in movement, the cinema, like the house we live in, is deeply liveable. [...]. It appeals to our emotion in order to spread it. And it does so tangibly»[20].

Predicative intentionality of the images

Before concluding, I would like to try to show the conditions for the possible relation between pathic and haptic. They can be found at the level of predicative intentionality of the images. We start from the *immediacy of the images*. Images have

[18] Masullo, 2004, 126.
[19] Gadamer, 1983, 37.
[20] Bruno, 2002, 183; 227. See also Millar, 1994.

a special power to enthrall which forces us not to remain neutral, but to take a stance. At the same time, it is precisely this willingness calling for the imaginative completion of what emerges in viewing, that enables us to say that the innate potential of an image is never immediately accessible, but requires mediation. The first look alone is not enough, because it refers to the perceivable appearance, neglecting the fundamental point that in the image it is possible to capture something *beyond the image*. In what ways can this reference be grasped and what does it involve? Initially, the fact that the image extends beyond itself suggests a deeper connection between what the image is *saying*, and methodologies of thought and judgements. This first finding therefore enables us to assert the symbolic power of every image in the sense that through the image, which is visible, there is the allusion to something not immediately given, and therefore invisible. A path therefore exists leading from the visible to the invisible, from seeing to thinking. Images in this sense call up the complexity of our experience, summoning history, memory, a series of "values" (ethical, aesthetic, spiritual) which make it a stable reality of our knowledge and not its contingent simulacrum. This path however involves a suspension of all the certainty that is initially seen to be natural. Taking this path means trusting the power of thought about the facts of the viewing and more generally about the viewing itself and the conditions that make it possible. It is a matter here of using reason to establish a distance from the immediately perceivable reality so as to grasp the conditions where it is possible, or to effect an essential *epoché*, following Husserl's pointers: «*We do away with the general thesis about the essence of the natural attitude*, we suddenly put what it embraces in brackets… therefore the *whole natural world*, which is constantly «here for us», «at hand» and that will continue to exist as «reality» for the consciousness, even though putting it in brackets is to our liking»[21]. It is therefore a question of distancing oneself from the natural tendency of the spirit to believe that everything is immediately accessible, that everything is «at hand». Life lived following this disposition is totally directed at such things. Can we give an example of this process, starting from an image? I think we can, if we examine the famous painting, *The Ambassadors* by Hans Holbein the Younger, painted in 1533. It is well known that it depicts two important political figures of the time. The dignity and rank of the two men can already be seen in the magnificent clothes and in the setting in which they are depicted. Between the two men there are also several objects (a globe, books, a sundial) symbolising the power that was available to these two men. The globe indicates men's power to represent the infinitely great; the books represent the sphere of knowledge, and the sundial is in a sense the most sophisticated instrument

[21] Husserl, 2002, 66 ff.

of this power, alluding to the capacity to measure the epitome of the invisible, time. Putting all these elements together it would therefore seem that Holbein wanted to depict, with the two men, the character of a whole age. However, if one looked only at these superficial elements, one would not grasp the true meaning of the painting. This meaning can only be understood if one looks at the painting from a particular angle which reveals an anamorphic figure between the two ambassadors' feet. What is this figure which, seen from a normal angle, looks indecipherable? It is a skull. At the feet of the two men (between their feet) Holbein places the symbol of fallibility. This presence, discrete and invisible, has the power to radically change the meaning of the entire painting. Holbein is not celebrating the power of man, but is instead denouncing the vanity of all power unless it is connected to the element that underlies all others: human fallibility. While the two ambassadors with their instruments for measuring things seem to be measuring the world, they are actually being measured by a unit of measurement, death, which underlies them and constitutes them. So what does one achieve by going beyond the immediacy of the image? First of all, the image is the typical way things appear during the person's intentional activity. Every object of external perception becomes, for the perceiver, an image. An object is therefore perceived through a series of images of it, produced inside a person as a passive function (the images prevail over the person), and with a productive function (the unification of the various images of an object due to the kinaesthetic movements of the person him/herself). Secondly, we can recall acts of memory that have the power to place a theme along an objective time-line. This however is related to the level of reproduction of a positional consciousness. It is however on the third level that we specifically find the imagination proper, consisting of the "quasi" positional consciousness (*Quasi-posizionalität*), or of proceeding *as if*, that is, the fact that the experiences of the imagination have no connection with perceptions. The objectivities of the imagination are not part of the objectivities of perception. Fantasies «no longer have a connection in *referring to objects*, neither among themselves nor with perceptions»[22]. Husserl in *Experience and Judgement* comments: I can imagine a motorcyclist or I may have imagined a hippopotamus but these two images have no direct connection with the table that I am now perceiving, in other words they have no *temporal position* concerning one another. While it is possible to *dislocate* past experiences in time, placing them along a line where one can distinguish a *before* and an *after,* this is not possible for the objectivities of the imagination: «the motorcyclist is neither before nor after the hippopotamus or the table that I now perceive»[23].

[22] Husserl, 1965, 183.
[23] Husserl, 1965, 184.

Keeping in mind this feature of the imagination, we can think of the importance of what Husserl himself in *Ideas* calls the «privileged position» of imagination compared to perception. The example given is that of the draughtsman, who when drawing plans, must keep in mind real, concrete data, but at the same time, by using his imagination can expand the possible, enjoying in Husserl's words, «incomparable freedom in the arbitrary transformation of the designs imagined»[24]. There is such imbalance between perception and imagination that «even when the design is "being thought about", the new thought processes that follow are processes of imagination the results of which are established by the new lines added to the design»[25]. What is true for the draughtsman is even more so for the phenomenologist, since he too starts from limited initial data. That is why, though one cannot disregard what is initially available, «the freedom to seek the essence necessarily requires one to work with the imagination»[26]. It is by means of the specific relation between perception and imagination that images lead beyond themselves, serving in the passage towards meanings and enabling the invisible to be reached. For this reason they cannot be considered equal to a mere sign. From this point of view it may be useful to return to the distinction between «indicative signs», or signals (*Anzeichen*) and «expressive signs» or expressions (*Ausdrücke*) which Husserl deals with in the First of *Logical Investigations.* Indicative signs, like road signs, have the simple function of indicating something. Their function consists of standing for something else and of pointing us to the referent. This is different from expressive signs, such as a smile for instance. A smile is in fact a sign of the joy felt, in the sense that it indicates joy, it refers to joy, but it is itself an expression of that joy. In this case, there is a participation that constitutes the value itself of the sign. In this type of sign there is an immediate intentional transfer between the physical appearance of the sign and its intentional meaning. The image therefore provides an example of the path needed for the correct approach of philosophy of cinema, which while it acknowledges the full validity of the phenomenon, believes it should go beyond this. The symbolic-image is therefore itself an expressive sign because while it shows that it is possible to proceed beyond the mere phenomenological data, it is itself, sure evidence of the existence of an eidetic order.

[24] Husserl, 2002, 169.
[25] Husserl, 2002, 169.
[26] Husserl, 2002, 170.

Conclusions

In these comments I have tried to recall the specificity of cinema communication which intercepts the very heart of the process of argumentation. Thinking about these aspects means at the same time trying to salvage the dimension of rationality that can be called *pathic reason*, far both from a disenchanted rationality and from a pathos lacking all theoretical depth. In this sense, I think the best way to leave you is by referring to the following passage from Maria Zambrano: «There must have been an initial moment when feeling and understanding were not separate, that first moment of knowing that is neutral enough to be situated or not situated in a certain time, in a more or less precise *illo tempore*, since every beginning is also a destination: where it makes itself available in all its active purity, that is the place of "knowledge that is sought". When knowledge began, understanding and feeling could not have existed separately; and it is by bringing them into contrast, playing on the separation that later emerged, that shows the distance between those who in this way pursue this knowledge that is sought – and those who are present right from the start»[27].

[27] Zambrano, 1992, 93-94.

Bibliographical References

Barbera, A., Turigliatto, R., *Leggere il cinema*. Milano: Mondadori, 1978.

Bruno, G., *Atlante delle emozioni. In viaggio tra arte, architettura e cinema*. Milano: Paravia-Bruno Mondadori, 2002.

Burch, N., *Il lucernario infinito*. Milano: Editrice Il Castoro, 2001.

Canudo, R., *Lettere d'arte. Trionfo del cinematografo*. In *Il nuovo giornale.* 25 Novembre 1908.

Dudley, A.J., *The Major Film Theories*. Oxford: Oxford University Press, 1976.

Gadamer, H.G., *Verità e metodo*. Milano: Rusconi, 1983.

Hatwell, Y., Streri, A., Gentaz E. (Eds.), *Touching for knowing: cognitive psychology of haptic manual perception.* Amsterdam: John Benjamin B.V., 2003.

Hatwell, Y., *Toucher l'espace. La main et la perception tactile de l'espace.* Lille: Presses Universitaires de Lille, 1986.

Heller, M.A., Schiff, W. (Eds.), *The psychology of touch.* Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1991.

Husserl, E., *Esperienza e giudizio.* Milano: Silva editore, 1965.

Husserl, E., *Idee.* Torino: Einaudi, 2002.

Husserl, E., *Ricerche logiche.* Milano: Il Saggiatore, 2001.

Lhote, M., Streri, A., *Le mémoire haptique de la forme des objects chez les bébés âgés de 5 mois.* In *L'Année Psychologique,* 103, 33-50.

Masullo, A., *Paticità e indifferenza.* Genova: Il Melangolo, 2004.

Millar, S., *Understanding and representing space. Theory and evidence from studies with blind and sighted children.* Oxford: Clarendon Press, 1994.

Mossetto, A.M., *Forme e strutture del film nel primo Ricciotto Canudo.* In: *Cinema nuovo,* n.° 225, 1973, 358-365.

Münsterberg, H., *The Photoplay: A Psychological Study.* New York: D. Appleton and Company, 1916.

Perelman, C., Olbrecht-Tyteca L., *Trattato dell'argomentazione. La nuova retorica*. Torino: Einaudi, 1982.

Pudovkin, V.I., *La settima arte.* Roma: Editori Riuniti.

Zambrano, M., *Hacia un saber sobre el alma.* Madrid: Alianza Editorial, 2001.

Zambrano, M., *I beati*. Milano: Feltrinelli, 1992.

Dynamique Dialogique: Lecture d'une controverse entre logiciens jaïns et grammairiens en Inde classique

Matthieu Fontaine, Marie-Hélène Gorisse, Shahid Rahman
(Université de Lille 3, UMR STL)
fontaine.matthieu@gmail.com

1. Introduction

L'objectif de ce travail est de présenter une lecture moderne d'une controverse indienne du onzième siècle de notre ère entre les logiciens jaïns et les grammairiens de la tradition pāṇinéenne. En s'intéressant à ce dialogue entre deux traditions temporellement et géographiquement éloignées, notre projet vise une traduction et une compréhension des textes indiens classiques en replaçant leurs enjeux dans un contexte plus large au sein duquel un lecteur moderne peut se positionner et s'orienter.

Il s'agit d'autre part d'une confrontation philosophique et conceptuelle des deux traditions en question. Plus précisément, la controverse que nous étudions porte sur la signification des temps grammaticaux et se déroule dans un contexte plus général de discussions sur les théories de la connaissance et la possibilité d'établir universellement un système de règles. Il n'y a cependant pas de sémantique proprement dite dans les théories indiennes. Face à cette lacune, on prétend apporter des éclaircissements en dégageant les thèses des uns et des autres par une analyse des pratiques argumentatives. C'est pourquoi on propose ici une reconstruction moderne de ces thèses dans le contexte de la logique dialogique, qui permet de développer une approche inférentielle de la signification et de capturer la dimension dynamique des opérateurs et des quantificateurs[1].

[1] Cela a déjà été réalisé pour l'approche du bouddhiste Nāgārjuna en Gorisse[09].

Plus généralement, l'approche inférentielle de la signification, qui émane de l'école constructiviste en lien avec les développements de Brandom[00], entend prendre au sérieux la thèse de Wittgenstein selon laquelle la signification c'est l'usage. Et la logique dialogique, en présentant la preuve comme un processus argumentatif, permet de développer une théorie de la signification qui tienne compte de la dynamique des questions et des réponses au sein d'un jeu de langage. Cette approche est essentielle si l'on veut être en mesure de capturer les choix inhérents à la sémantique des opérateurs. Or, c'est dans ce contexte que l'on comprend les arguments en jeu dans cette controverse. En effet, en mettant l'accent sur les choix, apparaissent en filigrane les arguments ontologiques sous-jacents à la controverse moderne autour de l'actualisme, du possibilisme et du semi-possibilisme. En d'autres termes, par la dialogique, on voit clairement ce qui pousse les grammairiens pāṇinéens à contraindre certains choix sur fond d'arguments ontologiques. Et c'est là précisément le cœur de l'objection jaïne : prisonniers d'une conception actualiste trop rigide, les grammairiens inhibent certains choix et occultent du même coup la signification des opérateurs. C'est ce qui nous mène à proposer une hypothèse de lecture semi-possibiliste de l'approche jaïne. Dans un premier temps, on présentera de façon générale le projet jaïn dans lequel est rapportée la controverse. On précisera ensuite le point de la controverse et les enjeux concernant l'interprétation des temps verbaux. Faisant le choix d'interpréter les temps verbaux comme des opérateurs temporels, on expose ensuite les règles pour les logiques dialogiques actualiste, possibiliste et semi-possibiliste. C'est dans ce contexte qu'on reconstruit ensuite les arguments de la controverse et la signification des opérateurs pour les grammairiens, et qu'on voit précisément le point de l'objection jaïne.

1.1. Le projet jaïn

Dans ses *Eclaircissements sur le mode de présentation des objets de connaissance* (*Prameya-kamala-mārtaṇḍa*), le Jaïn Prabhācandra défend au 11^e^ siècle de notre ère la thèse jaïne de la non-unicité (*an-eka-anta-vāda*). Selon cette version du pluralisme épistémologique, plusieurs ensembles distincts d'énoncés de connaissance justifiée peuvent co-exister car notre position dans le monde est telle qu'un énoncé de connaissance est toujours déjà engagé dans un ensemble de présuppositions qui en restreignent la portée. C'est à partir de ce constat que les jaïns développent deux théories qui s'alimentent l'une l'autre. La première, la théorie des points de vue (*naya- vāda*), pour énoncer les différents ensembles de standards épistémiques ; la seconde, la théorie du 'soit' (*syād- vāda*), pour donner les règles d'énonciation d'un énoncé de connaissance contextuel au sein d'un débat testant l'universalité des thèses engagées.

La théorie des points de vue est une méta-théorie de la connaissance qui propose une classification des sept grands types de théorie de la connaissance, appelés 'points de vue' (*naya*). Chaque point de vue est par nature incomplet parce qu'il se concentre sur un aspect. Avec cette théorie, les Jains rendent compte des discussions philosophiques qui ont eu lieu en Inde à différentes époques puisqu'ils positionnent dans cette classification l'ensemble des théories de la connaissance de leurs époques. La controverse que nous allons étudier s'est engagée au 11^{e} siècle à propos du cinquième de ces points de vue, qui ne s'intéresse qu'au nom en tant que ce dernier dénote le sujet d'une prédication. Nous n'allons pas entrer dans les détails de la théorie des points de vue[2], car les arguments utilisés dans notre controverse ne le demandent pas. Tout ce qui nous intéresse ici est que la notion de contexte qui est principale dans cette théorie globale est également principale dans chacun des points de vue particuliers.

Le point de vue sémantique (*śabda-naya*) est le cinquième point de vue. Il regroupe les théories de la connaissance qui sont premièrement des théories de la signification et considèrent que l'étude du langage est le moyen principal pour accéder à une connaissance des états du monde. Ce sur quoi se concentre ce point de vue est donc la dénotation d'un mot sanskrit. C'est ici que les jaïns positionnent l'école des grammairiens, qui sont toujours également des philosophes du langage, de la tradition pāṇinéenne.

1.2. Nature de la critique

Tout d'abord, le projet des grammairiens est de rendre compte de l'usage courant du langage. En ce sens, toute leur théorie converge vers une élucidation du sens quotidien des énoncés. Pour ce faire, ils établissent une classification des distinctions pertinentes eu égard à la détermination de la signification d'un énoncé : distinctions de temps, de fonction dans la phrase, de genre, de nombre, de personne, et de type de préverbe utilisé. Voici le point de vue des grammairiens tel qu'il est présenté par les Jaïns :

> kāla-kāraka-liṅga-saṃkhyā-sādhana-upagraha-bhedād-bhinnnam-arthaṃ
> śapati-iti śabdo nayaḥ śabda-pradhānatvāt |
> tato 'pāstaṃ vaiyākaranāṇāṃ matam |

[2] Pour davantage sur ce sujet, voir la présentation en Ganeri[00] et Ganeri[06], ou encore en Lorenz[08].

> [Ce point de vue est appelé] le 'point de vue sémantique' car il vise premièrement le mot. Il invoque[3] la signification (*artha*) comme étant différenciée par les différences de temps, de fonction (*kāraka*), de genre, de nombre, de personne (*sādhana*)[4] et de préverbe (*upagraha*)[5]. A partir de là, ce qui est considéré par les grammairiens est réfuté[6]. [PKM, p.685]

Plus précisément, le problème selon les jaïns est que quelle que soit la signification que les grammairiens prêtent aux temps verbaux, certains énoncés du sanskrit impliquent des temporalités complexes qu'ils ne sont pas en mesure d'expliquer de façon pertinente. Pour ces énoncés, les grammairiens doivent introduire une clause *ad hoc*. Cependant, cette clause *ad hoc* modifie les règles d'interprétation locales des temps verbaux et écrase les distinctions conceptuelles premièrement fixées par les distinctions de temps et on finit par se trouver face à des problèmes d'ambiguïté au niveau même des règles.

2. Les distinctions de temps

2.1. Présentation de l'exemple problématique

Tout d'abord, les grammairiens partent d'un constat : lorsque dans le langage quotidien l'on est confronté à un cas où deux temps grammaticaux sont imbriqués, comme dans l'exemple :

(1) *Il aura un fils qui aura tout vu* (*viśva-dṛśvā asya putro bhāvitā*)

Le sens commun est de comprendre cet énoncé :

(2) *Il aura un fils qui verra tout* (*yo viśvaṃ drakṣyati so'sya putro bhāvitā*)

Et non :

(3) *Il aura un fils qui a déjà tout vu*

---

[3] L'utilisation de ce terme dans ce contexte choque. Il s'agit d'une dérivation exégétique, et non historique, de '*śabda*' (que nous avons traduit 'sémantique' pour des raisons philosophiques, mais qui signifie au départ 'relevant du langage', 'son', 'mot', etc.) à partir de la racine '*śap-*' ('maudire', puis 'conjurer', 'implorer', 'invoquer', etc.).

[4] Dans les autres traités jaïns, nous trouvons '*puruṣa*' à la place de '*sādhana*'.

[5] Ce terme technique jaïn est un équivalent au terme pāṇinéen '*upasarga*', introduit en A.1.4.59. 'A.1.4.59' réfère au célèbre traité de Pāṇini, *Les Huits Leçons* (*Aṣṭa-Adhyāyī*).

[6] La traduction de tous les passages du *Prameya-kamala-mārtaṇḍa* est de Marie-Hélène Gorisse et fait partie de sa dissertation doctorale. La traduction a été révisée par Judit Törzsök, que nous tenons ici à remercier pour son aide inestimable !

Maintenant, s'il en va ainsi dans cet exemple, c'est que l'interprétation (2), 'il aura un fils qui a déjà tout vu', est bloquée par la présupposition selon laquelle quelqu'un qui n'existe pas encore ne peut agir. Une théorie dynamique des présuppositions pourrait sans doute permettre de choisir entre les interprétations (2) et (3).

Avant de continuer, il est important de noter cette spécificité du sanskrit qui introduit des valeurs temporelles au sein d'expressions nominales référant à un individu. Plus précisément, la règle introduite en A.3.2.94 stipule que l'affixe '*vā*' prend la valeur passée dans le cas de composés tels que '*viśva-dṛśvā*' (mot-à-mot 'un ayant-tout-vu').

Ainsi, notre problème d'évaluation des valeurs temporelles inclut également la question du domaine de référence auquel appartient l'individu dénoté par cette expression contenant une valeur temporelle[7]. En outre, dans le cas étudié par les jaïns, la question se mêle également à celle des entités non existantes et à l'impossibilité de dire quelque chose de vrai à propos des entités fictionnelles.

2.2. Dialogique actualiste

Dans ce qui suit, on fait le choix d'aborder les temps verbaux grammaticaux comme des opérateurs temporels. Sur ce point, on se trouve d'emblée confronté aux problèmes inhérents à la logique modale de premier ordre. C'est dans le cadre dialogique, où la signification des opérateurs est donnée en termes de choix (attaques, réponses, choix de contextes, d'individus), qu'on propose une sémantique fondée sur les pratiques argumentatives. Intuitivement, l'idée est que dans l'approche actualiste on ne peut appliquer un prédicat à une constante à un contexte w_i donné que si cette constante existe dans ce contexte[8]. On va donc relativiser l'existence des constantes aux contextes où elles sont introduites par la défense d'une existentielle ou l'attaque d'une universelle. Pour ce faire, on introduit dans le langage une famille P d'ensemble de paramètres P_{ti}, P_{ti}, …, P_{tn} propres à chaque instant du temps. A partir de là, si on défend par exemple un quantificateur au temps t_i, on doit choisir un paramètre dans l'ensemble P_{ti} et ce paramètre ne peut pas être utilisé dans un autre contexte s'il n'existe pas.

Dans l'approche possibiliste, les quantificateurs portent sur n'importe quel contexte. On peut par exemple appliquer un prédicat à une constante k_i à un contexte

[7] Voir Kripke[63].

[8] Pour plus de précisions sur les logiques libres, voir Leonard[56], Lambert[97] ou encore Fontaine, Redmond & Rahman[09] pour un traitement dialogique de ces enjeux.

w_i même si cette constante n'existe pas à k_i. Enfin, dans l'approche semi-possibiliste, seuls les quantificateurs ne portent que sur les individus existants dans le contexte en question, mais les prédicats peuvent s'appliquer à des constantes qui n'existent pas dans ce contexte. Ainsi, une constante indexée k_{ti} peut très bien être utilisée dans un contexte w_j différent de w_i où elle aurait été introduite.

L'enjeu est maintenant de dégager une sémantique des pratiques argumentatives et ce dans le contexte de la logique dialogique. En effet, c'est pour nous le contexte idéal afin de reconstruire des thèses dont nous n'avons accès qu'à travers des controverses argumentatives. Qui plus est, en vue de rendre compte de la dynamique des points de vue et des contextes si chère aux jaïns, il est indispensable d'opérer cette reconstruction dans un cadre qui respecte la dynamique des choix, essentielle pour la signification des opérateurs et des quantificateurs. Nous proposons néanmoins en annexe une explication sémantique de ces différentes approches dans la théorie des modèles.

Maintenant que nous avons spécifié les cadres dans lesquels nous allons travailler, introduisons brièvement la dialogique[9]. Afin de formuler les règles pour le déroulement du jeu, on définit tout d'abord la notion de coup au moyen d'un langage enrichi :

> **[Coup]** Soit un langage de premier ordre **FO**[τ] construit sur le vocabulaire τ. Un coup est une expression de la forme <**X** – f – e> telle que :
>
> (i) $\mathbf{X} \in \{\mathbf{O},\mathbf{P}\}$,
>
> (ii) $f \in \{ ?, !\}$,
>
> (iii) Pour une constante k_i de **FO**[τ], $e \in \{form(\mathbf{FO}[\tau]) \cup \{L,R,\vee,\exists,k_i\}\}$.

O (Opposant) et **P** (Proposant) dénotent les joueurs d'un dialogue. Nous utilisons **X** (et **Y**, avec $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$) comme méta-variables pour les joueurs. Les symboles de force « ? » et « ! » indiquent si un coup est une question (?) ou si c'est une défense (!). Le « ! » de l'assertion est souvent omis.

Ce langage enrichi est maintenant associé à un ensemble de règles, les règles de particule et les règles structurelles. Les règles de particule pour commencer fournissent une description abstraite de la signification locale des constantes logiques en termes d'attaque et de défense.

[9] Pour des introductions plus complètes à la dialogique, voir Fontaine & Redmond[08], Keiff[08], Rahman & Keiff[05] ou encore Rahman, Clerbout & Keiff[09].

Les règles structurelles définissent quant à elles l'organisation globale du jeu, ce qui influence la signification des assertions.

2.2.1. Règles de particules

Assertion	*Attaque*	*Défense*
X - ! – A ∧ B – t	Y - ? - $\wedge_1$ – t ou Y - ? - $\wedge_2$ – t	X - ! – A – t ou X - ! – B, respectivement
X - ! – A ∨ B – t	Y - ? - ∨ - t	X - ! – A – t ou X - ! – B - t
X - ! – A → B – t	Y - ! – A – t	X - ! – B – t
X - ! – ¬A – t	Y - ! – A	pas de défense
X - ! – ∀xAx – t	Y - ? - ∀x\\k_i – t	X - ! – A[x\\k_i] – t
X - ! – ∃xAx – t	Y - ? - ∃ - t	X - ! – A[x\\k_i] – t
X - ! – **P**A – t	Y - ? – **P** – t	X - ! – A – t' [t'Rt]
X - ! – **H**A – t	Y - ? – **H**\t' - t	X - ! – A – t' [t'Rt]
X - ! – **F**A – t	Y - ? – **F** – t	X - ! – A – t' [tRt']
X - ! – **G**A – t	Y - ? – **G**\t' - t	X - ! – A – t' [tRt']

2.2.2. Règles structurelles

Les joueurs **P** et **O** jouent chacun leur tour en appliquant les règles de particule conformément aux règles structurelles suivantes :

(**RS-0**) (*Début de partie*) : Les expressions d'un dialogue sont numérotées, et sont énoncées à tour de rôle par **P** et **O**. La thèse porte le numéro 0, et est assertée par **P**. Tous les coups suivant la thèse sont des réponses à un coup joué par un autre joueur, et obéissant aux règles de particule et aux autres règles structurelles. On appelle D(A) un dialogue qui commence avec la thèse A, les coups pairs sont des coups faits pas **P**, les coups impairs sont faits par **O**.

(**RS-1** $_{\textbf{intuitionniste}}$) (*Clôture de ronde intuitionniste*)

A chaque coup, chaque joueur peut soit attaquer une formule complexe énoncée par l'autre joueur, soit se défendre *de la dernière attaque contre laquelle il ne s'est pas encore défendu*. On peut attendre avant de se défendre contre une attaque tant qu'il reste des attaques à jouer. Si c'est au tour de X de jouer le coup *n*, et que Y a joué deux attaques aux coups *l* et *m* (avec $l<m<n$), auxquelles X n'a pas encore répondu, X ne peut plus se défendre contre *l*. En bref, on peut se défendre seulement contre la dernière attaque non encore défendue.

(**RS-1-** $_{\textbf{classique}}$) (*Clôture de ronde classique*) A chaque coup, chaque joueur peut soit attaquer une formule complexe énoncée par l'autre joueur, soit se défendre contre *n'importe quelle* attaque de l'autre joueur (y compris celles auxquelles il a déjà répondu).

(**RS-2**) (*Ramification*) Si dans un jeu, c'est au tour de **O** de faire un choix propositionnel (c'est-à-dire lorsque **O** défend une disjonction, attaque une conjonction, ou répond à une attaque contre une conditionnelle), **O** engendre deux dialogues distincts. **O** peut passer du premier dialogue au second si et seulement s'il perd celui qu'il choisit en premier. Aucun autre coup ne génère de nouveau dialogue.

(**RS-3**) (*Usage formel des formules atomiques*) Le proposant ne peut introduire de formule atomique : toute formule atomique dans un dialogue doit d'abord être introduite par l'opposant. On ne peut pas attaquer les formules atomiques.

(**RS-4**) (*Gain de partie*) Un dialogue est *clos* si et seulement s'il contient deux occurrences de la même formule atomique, respectivement étiquetées X et Y. Sinon le dialogue reste *ouvert*. Le proposant gagne le dialogue si et seulement si le dialogue est clos. Un dialogue est terminé si et seulement s'il est clos ou si les règles (structurelles et de particule) n'autorisent aucun autre coup. L'opposant a gagné le dialogue si et seulement si le dialogue est terminé et ouvert.

Afin d'introduire la règle suivante, RS-5, on définit la notion de répétition et l'adapte à la logique de premier ordre :

(Définition) Répétition stricte d'une attaque / d'une défense :

a) On parle de répétition stricte d'une attaque, si un coup est actuellement attaqué bien que le même coup ait été attaqué auparavant par la même attaque. Dans le cas d'un coup où un **quantificateur universel** a été attaqué avec une constante, le type de coup suivant doit être ajouté à la liste des répétitions strictes :

Un coup contenant un quantificateur universel (c'est-à-dire une formule quantifiée universellement) est attaqué en utilisant une nouvelle constante, bien que le même coup ait déjà été attaqué auparavant avec une autre constante qui était nouvelle au moment de cette attaque.

Un coup contenant un quantificateur universel est attaqué en utilisant une constante qui n'est pas nouvelle, bien que le même coup ait déjà été attaqué auparavant avec la même constante.

b) On parle de **répétition stricte d'une défense**, si un coup d'attaque m_1, qui a déjà été défendu avec le coup défensif m_2 auparavant, est à nouveau défendu contre l'attaque m_1 avec le même coup défensif.

Dans le cas d'un coup où un **quantificateur existentiel** a déjà été défendu avec une nouvelle constante, les types de coups suivants doivent être ajoutés à la liste des répétitions strictes :

Une attaque sur un quantificateur existentiel est défendue en utilisant une nouvelle constante, bien que le même quantificateur ait déjà été défendu auparavant avec une constante qui était nouvelle au moment de cette attaque.

Une attaque sur un quantificateur existentiel est défendue en utilisant une constante qui n'est pas nouvelle, bien que le même quantificateur ait déjà été défendu auparavant avec la même constante.

Remarque : Selon ces définitions, ni une nouvelle défense d'un quantificateur existentiel, ni une nouvelle attaque sur un quantificateur universel, n'est, à proprement parler, une stricte répétition si l'on utilise une constante qui, même si elle n'est pas nouvelle, est différente de celle utilisée dans la première défense (respectivement, la première attaque) et qui était nouvelle à ce moment.

(**RS-5**) (*Règle d'interdiction de répétitions à l'infini*)
Cette règle a deux variantes, l'une classique et l'autre intuitionniste, chacune dépendant du type de règles structurelles avec lesquelles est engagé le dialogue.

(**RS-5$_{\textbf{classique}}$**) Les *répétitions strictes* ne sont pas autorisées.

(**RS-5$_{\textbf{intuitionniste}}$**) Dans la version intuitionniste, si **O** a introduit une nouvelle formule atomique qui peut maintenant être utilisée par **P**, alors **P** peut exécuter une *répétition d'attaque*. Les *répétitions strictes* ne sont pas autorisées.

Remarque : Cette règle, quand elle est combinée à une procédure systématique adéquate, permet à l'Opposant de trouver un dialogue fini, où il gagne s'il y en a un : c'est-à-dire qu'il pourrait y avoir des formules où l'Opposant peut gagner seulement avec un jeu infini. Le point de la procédure systématique est le suivant : on suppose que, dans un jeu, k_i apparaît et que l'Opposant doit maintenant choisir une constante. Alors il produira deux jeux différents : dans l'un, il utilisera l'ancienne constante ; dans l'autre, il utilisera la nouvelle constante.

Pour l'attaque et la défense des quantificateurs dans les contextes modaux, on ajoute la règle suivante :

(**RSA-1**) **Règle actualiste pour les domaines globalement variables** : Quand X attaque un quantificateur universel ou défend un quantificateur existentiel à t_i, il doit choisir un paramètre dans l'ensemble P_i de paramètres associés à t_i.

Une conséquence de cette règle est que les formules de Barcan et leurs converses ne sont plus valides, comme le montre le dialogue suivant :

t		**O**			**P**		t
					$\mathbf{P}\exists xAx \rightarrow \exists x\mathbf{P}Ax$	0	0
0	1	$\mathbf{P}\exists xAx$	0		$\exists x\mathbf{P}Ax$	2	0
0	3	?∃	2		$\mathbf{P}Ac_0$	8	0
1	5	$\exists xAx$		1	?**P**	4	0
1	7	Ac_1		5	?∃	6	1
0	9	?**P**	8				

Le proposant **P** ne peut pas répondre au coup 9 puisqu'il ne peut pas poser $Ak_{1.0}$ en t_1.

3. Le point de vue des grammairiens

3.1. L'exemple grammairien

Munis de la dialogique actualiste, on peut désormais comprendre les combinaisons de choix entre opérateurs et quantificateurs qui interviennent dans des temporalités complexes portant sur des domaines d'individus différents. Nous pouvons ainsi proposer une formalisation pour l'exemple des grammairiens, 'il aura un fils qui a tout vu'. Une première formalisation possible est la suivante :

t		O			P		t
					$\mathbf{F}\exists x\mathbf{P}Ax$	0	0
0	1	?**F**	0		$\exists x\mathbf{P}Ax$	2	1
1	3	?∃	2		$\mathbf{P}Ac_1$	4	1
1	5	?**P**	4				

Dans cette formalisation, la combinaison d'un quantificateur à un opérateur temporel passé dans la portée d'un futur permet de comprendre l'énoncé comme attribuant une propriété passée à un individu futur. En termes dialogiques, l'existence de $c_{1.1}$ est déterminée au contexte t_1 par le choix que fait le proposant lorsqu'il défend l'existentielle [coup 4]. Conformément à la sémantique de l'opérateur **P**, le proposant devrait pouvoir choisir n'importe quel contexte passé antérieur à t_1, y compris ceux dans lesquels c_1 n'existe pas. Ce n'est donc pas cette explication que veulent les grammairiens.

On pourrait maintenant objecter que pour contraindre les choix du contexte où sera posée l'existence, on pourrait proposer une lecture *de dicto*. A une telle objection, nous répondrions cependant par le dialogue suivant, qui montre qu'une telle lecture *de dicto* ne suffirait pas :

t		O			P		t
					$\mathbf{FP}\exists xAx$	0	0
0	1	?**F**	0		$\mathbf{P}\exists xAx$	2	1
1	3	?**P**	2		$\exists xAx$	4	-1
-1	5	**?∃**	4		Ac_{-1}	6	-1

Dans cette alternative, il s'agit d'une combinaison entre un opérateur passé et un quantificateur existentiel, le tout dans la portée d'un opérateur futur. Mais cela engage à choisir un individu dans un contexte passé, alors que l'on voudrait choisir un individu dans le futur. En termes dialogiques, du fait du jeu de la dépendance des choix pour la défense de **P**, cette formulation empêche cependant de choisir un contexte passé antérieur à celui où c_0 est choisi, bien qu'elle permette de choisir un individu dans un contexte antérieur au contexte d'énonciation t_0.

Les grammairiens vont donc chercher à ajouter une clause pour contraindre les choix, lors de la défense de l'existentielle et de l'opérateur **P**. Cette règle devra se conformer aux quatre exigences suivantes :

- Admettre la vérité de ‘il aura un fils qui a tout vu’.
- Déterminer l’existence de cet individu dans un contexte futur.
- Interdire l’application de prédicats passés à un contexte antérieur à ceux où existent l’individu.
- Formuler une règle générale concernant la signification des temps verbaux.

3.2. La règle des grammairiens

Comme nous venons de le développer, il n’y a pas moyen d’être assuré de toujours comprendre l’énoncé ‘il aura un fils qui aura tout vu’ de façon à ce que le fils existe déjà. Or les grammairiens, qui proposent une théorie du sens commun, veulent forcer cette lecture où le fils existe. C’est pour obtenir cela qu’il est pour eux nécessaire d’avoir recours à une règle. La règle qu’ils choisissent de formuler est la suivante :

dhātu-sambandhe pratyayāḥ [*Pāṇini-vyā*° 3.4.1]

Quand les significations de plusieurs verbes sont syntaxiquement liées, la signification des affixes temporels est correcte même si elle exprime des temps différents de ceux pour lesquels elle avait spécifiquement été prescrite[10].

Les Huits Leçons de Pāṇini, règle 3.4.1.

Nous reformulons cette règle comme suit :

Règle-G : La valeur temporelle du verbe de la subordonnée est fonction de la valeur temporelle du verbe de la principale.

Grâce à cette règle, le passé de ‘ayant tout vu’ prend toujours le sens futur de ‘il verra tout’ conformément au sens futur de ‘il aura un fils’.

Maintenant, en s’arrêtant sur cette règle, les Jains mettent le doigt sur la possibilité de considérer la *perspective* du locuteur lors de l’évaluation de la valeur temporelle d’un énoncé. Pour reprendre les termes de Reichenbach dans *Elements of Symbolic Logic*[11], les grammairiens auraient pu dire ici que dans certaines situations,

---

[10] Cette traduction française que nous proposons se base sur la traduction anglaise de cette règle de Pāṇini par Śrīśa Chandra Vasu, à partir de sa belle édition de l’*Aṣṭa-Adhyāyī*, en [AA], p. 555: ‘*When there is a syntactical relation between the senses of the verbs, the affixes are valid, even in denoting time other than that for which they have been specifically enjoined*’. Remarquons que la même règle se trouve chez les jaïns dans *La grammaire de Jainendra* (*Jainendra-vyākaraṇa*), voir [JV], règle 2.4.1.

[11] Voir Reichenbach[47].

le point de référence est synchronique avec l'événement et non avec le discours. Ainsi nous aurions :

Discours --- Evénement $_2$--- Evénement $_1$, Référence

Et non :

Evénement $_2$ --- Discours, Référence --- Evénement $_1$

En d'autres termes, la valeur passée de l'événement est dans cet exemple évaluée à partir de l'instant où l'événement principal Evénement $_1$) est réalisé, et non à partir du moment de l'énonciation. A ce point près que cette distinction n'était pas connaissance commune en Inde à cette époque et que tout indique que la possibilité d'un changement de référence à la Reichenbach ne soit pas même théorisée. Par exemple, Pāṇini parle de 'futur' ou de 'passé', jamais de 'futur antérieur'. On comprend désormais pourquoi la solution des grammairiens a été de contraindre la compréhension de la phrase comme ayant une signification entièrement future. Pour reprendre les termes de notre auteur jaïn :

> *te hi 'dhātu-sambandhe pratyayāḥ'* [*Pāṇini-vyā*° 3.4.1] *iti sūtram ārabhya 'viśva-dṛśvā asya putro bhāvitā' ity-atra kāla-bhede 'py-ekaṃ pada-artham-ādṛtāḥ 'yo viśvaṃ drakṣyati so'sya putro bhāvitā' iti, bhaviṣyat-kālena-atīta-kālasya 'bheda-abhidhānāt tathā vyavahāra-upalambhāt* |
>
> [Ce que disent les grammairiens est réfuté] car, à partir de la règle 3.4.1 de la grammaire de Pāṇini : 'la valeur temporelle du verbe de la subordonnée est fonction de la valeur temporelle du verbe de la principale', ces grammairiens admettent que la signification d'une expression est unique, même s'il y a une distinction de signification due au temps. Comme par exemple dans 'il aura un fils qui aura tout vu'. Dans cet exemple, c'est le sens commun de comprendre 'celui qui verra tout, celui-là sera son fils', c'est-à-dire de comprendre l'énoncé au moyen de l'absence de distinction entre le passé et le futur. [*ibid.*]

La formulation de cette règle dans les termes de la dialogique est intéressante car elle nous indique à quel niveau du processus agit une règle de ce type. Nous verrons ensuite en quoi cela donne des pistes de réflexion pour comprendre ce qui est en jeu chez les jaïns.

Plus précisément, il s'agit ici de contraindre les choix qui apparaissent lors de l'attaque ou la défense d'un opérateur temporel imbriqué dans la portée d'un autre opérateur. Pour ce faire, on se propose de donner la signification de la temporalité dans l'exemple par une règle *ad hoc* concernant la défense et l'attaque des quantificateurs et opérateurs. On introduit donc la règle suivante :

(**RS-G**) Quand X attaque ou défend un opérateur temporel O_1, Y se défend en supprimant tous les opérateurs temporels qui sont dans la portée de O_1.

On aura par exemple le dialogue suivant :

t		*O*			*P*		t
					$\mathbf{F}\exists x\mathbf{P}Ax$	0	0
0	1	?**F**	0		$\exists xAx$	2	1
1	3	?∃	2		Ac_1	4	1

Au coup 2, par application de (RS-G), le proposant répond en éliminant l'opérateur **P** qui apparaissait dans la portée du **F**. Au coup 4, le proposant choisit l'individu c_1 dans le contexte t_1 et lui applique le prédicat A dans ce même contexte.

4. Le point de vue des Jaïns

4.1. L'objection jaïne

Mais accepter cette **règle G**, qui modifie le déroulement du jeu, c'est accepter de modifier en profondeur la signification des temps verbaux. Plus précisément, la dialogique nous permet de voir que la **règle (RS-G)** inhibe des choix qui font partie de la sémantique même des opérateurs. Cela remet en question la compositionnalité du langage et l'on aurait toute une classe d'équivalences non désirées dans certains cas. La critique des jaïns va être précisément de pointer certaines équivalences non désirées que l'on obtiendrait avec cette nouvelle signification. Par exemple, nous ne pouvons plus différencier la signification des énoncés suivants :

(4) Il aura un fils qui a été annoncé
(5) Il aura un fils qui sera annoncé

En effet, la **règle G** force la lecture de (4) et lui donne la même signification que (5). Dans les termes du jaïn Prabhācandra :

tac ca-anupapannam ; kāla-bhede 'py arthasyā 'bhede 'tiprasaṅgāt,

rāvaṇa- śaṅkha-cakra-varti- śabdayor apy
atīta-anāgata-artha-gocarayor eka-arthatā apatteḥ |
atha-anayor bhinna-viṣayatva an-eka-arthatā ; 'viśva-dṛśvā bhāvitā' ity anayor apy asau mā bhūttata eva |

Mais [accepter cette règle] n'est pas correct. Car il y aurait la conséquence indésirable de [la généralisation de] l'absence de différence en ce qui concerne la signification alors même qu'il y a une différence dans les temps grammaticaux.

Et ainsi, même dans le cas des expressions 'Rāvaṇa' et 'Empereur Universel', l'identité [des significations] serait produite en dépit du fait que les domaines auxquels ces expressions réfèrent sont respectivement le passé et le futur. Dans cet exemple, c'est précisément parce que leurs domaines sont séparés qu'il n'y a pas d'identité [de signification] entre ces deux [expressions].

Par conséquent, pour cette même raison, nous devrions empêcher la [signification unique] des deux [temps grammaticaux différents] dans 'il deviendra celui qui aura tout vu'. [*ibid*]

Ici, l'argument est le suivant : certes, la signification commune dans le cas du fils qui a tout vu ne pose pas de problème. Mais il n'en faut pas faire une règle générale. En termes contemporains, on pourrait dire que cet exemple ne pose pas de problème en raison de la présupposition implicite et partagée par tous dans l'usage courant qu'un fils qui n'existe pas encore ne peut agir. Maintenant, dans le cas d'exemples où cette présupposition ne bloque rien du tout, si l'on maintient cette **règle G**, alors l'on se retrouve à bloquer non plus une interprétation indésirable, mais une interprétation désirée. Dans l'exemple 'il aura un fils qui a été annoncé', c'est bel et bien l'interprétation passée de 'a été annoncé' que l'usage quotidien retient.

A partir de cet exemple, nous allons tenter de comprendre celui des jaïns. C'est exactement de la même façon en effet que nous ne voulons pas une signification non distinguable de Rāvaṇa et de Śaṅkhacakravarti dans des expressions avec temporalités imbriquées de la forme :

(6) *Il aura un fils qui a vu Daśagrīvā.*
(7) *Il aura un fils qui verra Daśagrīvā.*

Plus précisément, en (6) nous parlons de la vision de Rāvaṇa, un homme qui est torturé et qui hurle. C'est pourquoi il abandonne le nom 'Daśagrīvā' pour prendre celui de 'Rāvaṇa', 'celui qui crie'.

Tandis que dans (7), nous parlons encore du même individu, mais ce fait est contingent. Ici, nous parlons de la vision de Śaṅkhacakravarti, c'est-à-dire de l'empereur Universel car le terrible Rāvaṇa, après avoir fait la guerre à de nombreux royaumes, devint empereur des trois mondes.

Faisons le dialogue équivalent à l'objection jaïne :

t		**O**			**P**		t
					(**F**∃x**P**Ax) ↔ (**F**∃x**F**Ax)	0	0
0	1	**F**∃x**P**Ax	0		**F**∃x**F**Ax	2	0
0	3	?**F**	2		∃xAx	8	1
1	5	∃xAx		3	?**F**	4	0
1	7	Ac_1		5	?∃	6	1
1	9	**?∃**	8		Ac_1	10	1
0	11	**F**∃x**F**Ax	0		**F**∃x**P**Ax	12	0
0	13	?**F**	12		∃xAx	18	3
3	15	∃xAx		11	?**F**	14	0
3	17	Ac_3		15	?∃	16	1
3	19	?∃	18		Ac_3	20	3

Nous voyons ainsi que quel que soit l'opérateur présent dans la portée de l'opérateur futur, sa valeur est effacée au coup 8. Et c'est à cause de ce coup que l'on obtient l'équivalence non désirée entre (**F**∃x**P**Ax) et (**F**∃x**F**Ax).

Maintenant, que proposent les jaïns pour maintenir cette distinction de signification dans les cas de temporalité imbriquée dans un contexte où les changements de perspective à la Reichenbach ne sont pas encore pensés, non plus les glissements sémantiques résolus par les théories dynamiques des présuppositions ? Encore une fois, reportons-nous au texte de Prabhācandra :

> *na khalu 'viśvaṃ dṛṣṭavān = viśva-dṛśvā' iti śabdasya yo 'rthe 'tīta-kālaḥ,*
> *sa 'bhavitā' iti śabdasya-anāgata-kālor yuktaḥ ;*
> *putrasya bhāvino 'tītatva-virodhāt |*
> *atīta-kālasya apy anāgatatva-adhya āropād eka-arthatve tu na paramā-arthataḥ*
> *kāla bhede 'py abhinna-artha 'vyavasthā syāt |*
>
> Certes, ce qui est le temps passé de la signification de l'expression 'ayant tout vu = celui qui a tout vu' ne convient pas pour le temps futur de l'expression 'il sera' car il y aurait la contradiction de l'état passé d'un fils qui est à venir. Mais si ces [expressions] n'avaient qu'une seule signification commune, par l'imposition du caractère futur même pour le temps passé, la signification non séparée serait inférée même lors de la séparation du temps. Or ce n'est pas ce que nous voulons dans un sens ultime [sens : or nous ne voulons pas ériger cette distinction en règle]. [*ibid*.]

Puis Prabhācandra se tait sur ce sujet et examine les problèmes dus aux ambiguïtés de personnes, de genre, de fonction, etc[12]. C'est donc à nous qu'il incombe, à partir de ces conditions, de reconstruire une proposition tenable.

Notre hypothèse est que la volonté jaïne de rendre compte des différents emboîtements d'opérateurs sans contraindre artificiellement les choix les engage dans un *semi-possibilisme*. Si nous procédons à une telle reconstruction, alors nous aurions le dialogue suivant :

t		**O**			**P**		t
					$(\mathbf{F}\exists x\mathbf{P}Ax) \leftrightarrow (\mathbf{F}\exists x\mathbf{F}Ax)$	0	0
0	1	$\mathbf{F}\exists x\mathbf{P}Ax$	0		$\mathbf{F}\exists x\mathbf{F}Ax$	2	0
0	3	?**F**	2		$\exists x\mathbf{F}Ax$	10	2
2	5	$\exists x\mathbf{P}Ax$		1	?**F**	4	0
2	7	$\mathbf{P}Ac_2$		5	?∃	6	2
1	9	Ac_2		7	?**P**	8	2
2	11	?∃	10		$\mathbf{F}Ac_2$	12	2
2	13	?**F**	12				

Dans ce dialogue, nous voyons que l'équivalence non désirée est évitée car au coup 14 le proposant ne peut pas jouer Ac_2 dans un temps postérieur à t_2. En effet, l'opposant ne lui a concédé cet atome qu'en t_1, qui est antérieur à t_2. Ainsi, 'il aura un fils qui verra tout' et 'il aura un fils qui a tout vu' ont bien deux significations différentes, et ce sans imposition de règle *ad hoc*.

5. Conclusion

En saisissant la signification au cœur des pratiques argumentatives, la logique dialogique aborde la dynamique des quantificateurs et opérateurs d'une façon qui permet de comprendre plus finement les enjeux soulevés par les Jaïns dans cette controverse sur la signification des temps verbaux. Ce gain de clarté est lié au fait que

[12] Plus précisément, la même structure de critique se retrouve à propos des distinctions, par exemple :
Concernant la fonction dans la phrase. L'agent ne doit pas être confondu avec l'objet, comme dans A.3.1.87 où 'bois' (*kāṣṭhaṃ*) dans '*bhidyate kāṣṭhaṃ svayam-eva*' ('le bois se fend'' au passif) a la même signification que dans '*abhedi kāṣṭhaṃ svayam-eva*' ('le bois se fend' à l'actif).
Concernant le nombre. Le singulier ne doit pas être confondu avec le pluriel, comme dans A.1.2.58 où '*saṃpanno yavaḥ*' (singulier) a la même signification que '*saṃpannā yavāḥ*' (pluriel) : 'du blé mûr'.

les considérations sémantiques sont, chez les Jaïns, développées à travers des pratiques argumentatives plutôt que dans une théorie des modèles. On a montré ici qu'on pouvait différencier et comprendre les différentes approches en s'appuyant sur les pratiques argumentatives et les règles qui leur sont propres.

Plus précisément, c'est en différenciant ces pratiques argumentatives dans le contexte de la logique dialogique que l'on comprend comment, pour des raisons ontologiques, les grammairiens veulent occulter certains choix inhérents à la sémantique des opérateurs et des quantificateurs. En effet, en refusant d'appliquer des prédicats à des entités non-existantes, les grammairiens sont contraints de bloquer certains choix, notamment ceux qui devraient être autorisés dans la portée d'un opérateur. Autrement dit, de bloquer le temps passé dans la portée d'un futur.

Ce qu'on a montré ici, c'est qu'en inhibant les choix, on perd la signification des opérateurs et c'est précisément le cœur de l'objection jaïne. Un actualisme trop rigide mène à contraindre les choix, voir les annule complètement. C'est en cela qu'on propose une hypothèse de lecture semi-possibiliste pour le point de vue jaïne. En effet, Prabhācandra admet la pertinence des arguments grammairiens, ce qui nous pousse à donner une interprétation actualiste aux quantificateurs. Mais, face à la règle trop contraignante des grammairiens, il revendique une certaine souplesse pour les opérateurs et les constantes. C'est ce qui nous mène à proposer une sémantique semi-possibiliste des contextes temporaux chez les Jaïns.

Annexe : Structures à domaines variables et constants

Soit une structure F = <W,R,D> avec :

- W un ensemble de mondes possibles,
- R une relation d'accessibilité entre ces mondes,
- D le domaine de la structure.

Concernant D, différents choix sont possibles : soit les domaines sont propres à chaque monde et sont variables, soit il y a un unique domaine (constant) pour tous les mondes. On donne les définitions plus précisément :

[D1] Domaine globalement constant – Le domaine de la structure <W,R,D> est *globalement constant* si D est un ensemble non vide et que pour tout w, w' $\in$ W on a $D_w = D_{w'}$.

[D2] Domaine localement constant – Le domaine de la structure <W,R,D> est *localement constant* si D est un ensemble non vide tel que pour certains $w,w' \in W$ on a $D_w = D_{w'}$.

[D3] Domaine globalement variable – Le domaine de la structure <W,R,D> est *globalement variable* si D est un ensemble non vide et que pour $w, w' \in W$ il n'est pas toujours le cas que $D_w = D_{w'}$.

[D4] Domaine monotonique (croissant) **-** Le domaine de la structure <W,R,D> est *monotonique* si D est un ensemble non vide et que pour tout $w, w' \in W$ on a $D_w \subseteq D_{w'}$.

[D4] Domaine anti-monotonique (décroissant) **-** Le domaine de la structure <W,R,D> est *monotonique* si D est un ensemble non vide et que pour tout $w, w' \in W$ on a $D_{w'} \subseteq D_w$.

Ces différents types de domaines vont amener à développer trois conceptions de la logique dialogique modale de premier ordre, selon le cadre dans lequel on travaille, à savoir :

- Le **Possibilisme** : dans une structure à domaine constant.
- L'**Actualisme** : défini dans une structure à domaine variable, à un contexte $w \in W$, la portée des quantificateurs est restreinte à D_w et un prédicat A ne peut s'appliquer qu'à des individus qui appartiennent à D_w.
- Le **Semi-possibilisme** : également défini dans une structure à domaine variable, à un contexte $w \in W$, la portée des quantificateurs est restreinte à D_w et ceux-ci sont interprétés de façon actualiste. Cependant, les constantes individuelles ont une interprétation possibiliste et peuvent porter sur des individus qui appartiennent à D_w' pour un $w' \in W$ possiblement différent de w. En d'autres termes, on pourrait voir l'actualisme comme une logique modale fondée sur une logique libre négative, tandis que le semi-possibilisme serait fondé sur une logique libre positive.

Bibliographie

Textes indiens classiques

[AA] Pāṇini. *Aṣṭa-Adhyāyī*. Tr.de Sumitra M.Katre, Motilal Banarsidass, Delhi, 1989.

[PKM] Prabhācandra. *Prameya-kamala-mārtaṇḍa*. Ed. De Mahendra Kumar Shastri Sri Garib, Dass Oriental Series n.90, Nirnayasagar Press, Bombay, 1941 (réimpr. Sri Satguru, Delhi, 1990).

[JV] Jainendra. *Jainendra-vyākaraṇa*. Ed. Śambhunāta Tripāṭhi Mahādeva Caturveī, Bharatiya Jnanapitha, Kasi (Benares), 1956.

Textes contemporains

R.Brandom. *Articulating Reasons: An Introduction to Inferentialism*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2000.

N. Clerbout, MH. Gorisse et S. Rahman. 'Context Sensitivy in Jain Philosophy. A Dialogical Study of Siddharsigani's Commentary on the Handbook of Logic'. A paraître dans le *Journal of Philosophical Logic*, 2011.

M. Fontaine et J. Redmond. *Logique Dialogique : une introduction - Première partie : Méthode de dialogique : règles et exercices*. Col. Cahiers de logique et d'épistémologie Vol. 5, D. Gabbay et S. Rahman (éds.), College Publications, Londres, 2008.

M. Fontaine, J. Redmond et S. Rahman. 'Etre et Etre choisi, Vers une logique dynamique de la fiction'. Dans *Fictions : logiques, langages, mondes*. Col. Cahiers de logique et dépistémologie, J. Dubucs et B. Hill (éds.), College Publications, Londres, 2009.

J. Ganeri. 'Jaina Logic and the Philosophical Basis of Pluralism'. Dans *History and Philosophy of Logic*, vol.23, n.4, Taylor and Francis Ltd, York, 2002, 267-281.

J. Ganeri. *Artha: Meaning*. Series 'Foundations of Philosophy in India', Oxford University Press, 2006.

MH. Gorisse. 'The art of non-asserting: Dialogue with Nāgārjuna'. Proceedings of the third colloquium 'Indian Conference on Logic and its Applications'. Dans *Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence*, vol.5378, R. Ramanujam and S. Sarukkai (éds.), FoLLi series, Springer, 2009, 257-268.

L. Keiff. 'Dialogical Logic'. Entrée de la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* à http://plato.stanford.edu/entries/logic-dialogical/

S. Kripke. 'Semantical Considerations on Modal Logic'. Dans *Acta Philosophica Fennica*, vol.16, Helsinki, 1963, 83-94.

K. Lambert. *Free Logics : Their Foundations, Character, and Some Applications Thereof*. Academia Verlag, Sankt Augustin, 1997.

HS. Leonard. *The Logic of Existence*. Philosophical Studies, vol.7, n.4, Michigan State, 1956.

K. Lorenz. 'Features of Indian Logic'. Dans *Dialogues, Logics and Other Strange Things. Essays in Honour of Shahid Rahman*, College Publication, London, 2008, 263-275.

S. Rahman et L. Keiff. 'On how to be a dialogician'. Dans *Logic, Thought and Action*, D. Vanderveken (éd.), Springer Verlag, Dordrecht, 359-408.

S. Rahman, N.Clerbout et L. Keiff. 'On Dialogues and Natural Deduction'. Dans *Acts of Knowledge: History, Philosophy and Logic*, G.Primiero and S.Rahman (éds.), 2009.

H. Reichenbach. *Elements of Symbolic Logic*. New York, Macmillan, 1947.

Superação do Formalismo Platónico Extensionalista pelas Lógicas Intensional e Modal

Sérgio Fernandes
(CFCUL)
svfernandes.hh@gmail.com

1. Extensionalismo e idealismo metafísico

A teoria fregeana da predicação (e logo, também, a Analítica) advém de uma lógica extensionalista. Na lógica de paradigma fregeano, os predicados não remetem para *conteúdos ideais* (intensões) mas sim para *classes* (extensões). É por isso que, na teoria Analítica da predicação, o predicado, em vez de remeter para uma propriedade de um indivíduo, remete para um conjunto de indivíduos, que pretensamente partilham uma propriedade[1]. Na filosofia analítica, a predicação é vista como subsunção, e não como atribuição, remetendo para uma unidade *formal*, em vez de para uma pluralidade *real*. Há, assim, no paradigma fregeano-Analítico, um primado do conceito, e não do objecto. Por conseguinte, o substrato expresso pelo sujeito de um juízo de percepção, em vez de estar ligado a um *seu* atributo (um acidente), está ligado a uma pretensa propriedade em si (uma Ideia). Em termos metafísicos, o que está por detrás desta posição é o primado do formal, da Ideia sobre a coisa física: o universal, em vez de estar ao serviço do particular, é o ponto de partida da filosofia fregeana e, consequentemente, da filosofia analítica. Mas, na verdade, a predicação remete para um *conteúdo lógico puro e simples* – uma idealização, que tem como

[1] Por vezes, a intensão que produz a extensão, na lógica extensionalista, não é uma propriedade mas uma *definição impredicativa*, i.e., uma definição que não usa um verdadeiro atributo – *e.g.*, a chamada *classe de Russell* é formada a partir do "predicado" *ser uma entidade que não pertence a si própria*: nesta definição não se encontra nenhum aspecto qualitativo – ela não descreve um possível objecto ou conjunto de objectos, através de um seu atributo ou de um atributo comum, ela remete directamente para um suposto aspecto extensional; e, por isso, não é uma genuína intensão. No fundo, a noção de *impredicatividade* é a defesa de uma contraditória *definição que não define*, porque, em vez de subsumir objectos através de uma qualidade que partilham, tenta apontar cegamente um conjunto de objectos: ou seja, um predicado que não é uma propriedade é um contra-senso, pois predicar é qualificar.

modelo originário a captação das qualidades das coisas –, ela não remete para um pretenso conceito ôntico – uma coisa espiritual, um habitante de um pretenso outro-mundo imaterial. No paradigma analítico, a predicação remete para uma reificação, e não para uma idealização. A primazia da extensão sobre a intensão é a maneira de subordinar metafisicamente o individual ao formal, é um modo dissimulado de subjugar a coisa à Ideia. A idealidade dos objectos científicos (i.e., os universais das várias ciências) é da ordem da irrealidade; ou seja, os universais não são entes espirituais – apesar de terem um carácter necessário e objectivo –, eles são *idealizações* operadas por sujeitos cognitivos, porque real é apenas a coisa física. O ideal da lógica extensionalista é libertar a disciplina do psicologismo; mas a noção fregeana e Analítica de psicologismo abarca qualquer filosofia que considere a *(re)presentação*[2]. É por isto que a ideia de uma lógica baseada em conteúdos ideais (i.e., puros conceitos não-reificados) é recusada pelo paradigma fregeano: a lógica intensional é interpretada como subjectivista; sendo a extensão, para os Analíticos, a terra prometida da objectividade da lógica.

Frege, no primeiro volume de *As Leis Fundamentais da Aritmética*, defende que qualquer conceito tem uma extensão – quinta lei fundamental da Aritmética:

> [...] uma igualdade de cursos-de-valores é igualmente convertível numa generalidade ou igualdade e vice-versa:
> $\vdash$ (ext ε ($f(\varepsilon)$) = ext α ($g(\alpha)$)) = ($\forall$a [f(a)] = g(a)) (V [...][3]

Ou seja, para cada argumento de *f(…)*, o valor da função é igual ao valor da função *g(…)* para o mesmo argumento; por exemplo: como a referência de «José trabalha no Terreiro do Paço» é igual à de «José trabalha na Praça do Comércio», então, o conceito de «trabalhar no Terreiro do Paço» é igual ao de «trabalhar na Praça do Comércio.

O que está implícito na definição fregeana de identidade entre conceitos como identidade entre as suas extensões é que qualquer conceito tem uma extensão; caso contrário, não era possível comparar extensões de quaisquer *funções* – género à qual se subsume a espécie *conceito* – *e.g.*, o conceito *ser uma lua de Vénus* e *ser uma montanha da Holanda* têm a mesma extensão: a classe nula. Assim sendo, a conceitos

---

[2] Uso esta expressão bizarra – «(re)presentação» – porque o termo «representação», apesar de muito vulgar e útil, é ambíguo. A percepção não é *re*-presentação mas sim presentação. *Representar* é usar uma *imagem* para visar através dela um objecto ausente ou inexistente: memória, imaginação, etc. Na percepção, pelo contrário, dá-se a recepção *da própria coisa* à consciência. Todavia, o tradicional uso do termo «representação» é útil para designar os dois casos, daí optar por esta heterodoxia gráfica, com vista a utilizar a expressão e sinalizar a sua ambivalência.

[3] *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. I, Jena (Hermann Pohle), 1893, § 20, p. 35. «[...] eine Wertverlaufsgleichheit immer in eine Allgemeinheit einer Gleichheit umsetzbar ist und umgekehrt:
$\vdash$ (ext ε ($f(\varepsilon)$) = ext α ($g(\alpha)$)) = ($\forall$a [f(a)] = g(a)) (V[…]»

inexistentes, quer seja possíveis (*e.g.*, ser um prédio com mil metros de altura) quer sejam impossíveis (*e.g.*, ser um quadrado redondo), corresponde uma classe nula:

> Com o seu conceito extensional de ciência, ele [Frege] sentiu-se satisfeito com que a referência da expressão predicativa seja assegurada mesmo se o conceito for vazio. Contudo, teve de pagar o preço disso de dois modos: primeiro, Frege nunca pôde clarificar o que, se não é o conceito, o sentido da expressão predicativa é; segundamente, a referência da expressão predicativa é, nesta tese, automaticamente garantida.[4]

Frege interpreta a identidade como *substituição extensional*, adoptando o *princípio da substituibilidade* de Leibniz: «*Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*.» ("Idênticas são as coisas que podem ser substituídas por outras, sem que a verdade se perca.") – tese já presente em *Os Fundamentos da Aritmética*:

> Leibniz apresenta então a seguinte definição: «*Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*.» É esta a elucidação da igualdade que eu adopto como minha. Se se diz, tal como Leibniz, «idêntico» ou «o mesmo», ou se se diz «igual», é irrelevante. É verdade que «o mesmo» parece exprimir uma coincidência total, enquanto «igual» parece exprimir uma coincidência apenas em relação a este ou àquele aspecto; é, todavia, possível adoptar-se uma formulação por meio da qual esta diferença desapareça. Basta que em vez de, por exemplo, «Os segmentos são iguais quanto ao comprimento» se diga «O comprimento dos segmentos é igual» ou «é o mesmo» ou, ainda, que em vez de «As superfícies são iguais quanto à cor» se diga «A cor das superfícies é igual». Foi assim que usámos a palavra nos exemplos acima referidos. Todas as leis da igualdade estão com efeito contidas na substituibilidade geral.[5]

Por outro lado, esta definição extensionalista de identidade entre conceitos olvida que a coincidência das extensões pode ser uma mera casualidade, enquanto a coincidência entre intensões não. Nas expressões «Terreiro do Paço» e «Praça do Comércio», não há qualquer ligação entre os seus conteúdos lógicos, ao contrário de «triângulo equilátero» e «triângulo equiângulo», que tem um conteúdo lógico que,

---

[4] Jitendra Nath Mohanty, *Husserl and Frege*, Bloomington (Indiana University Press), 1982, p. 49. «With is extensional concept of science, he felt satisfied that the reference of predicate expression is assured even if the concept is empty. However, he had to pay the price for this in two ways: first, Frege never could clarify what, if it is not the concept, the sense of a predicate expression is; secondly, the reference of a predicate expression is, in this thesis, automatically guaranteed.»

[5] Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, § 65, pp. 76-77. «Nun definirt Leibniz: „Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate." Diese Erklärung eigne ich mir für die Gleichheit an. Ob man Leibniz „dasselbe" sagt oder „gleich", ist unerheblich. „Dasselbe" scheint zwar eine vollkommene Übereinstimmung, „gleich" nur eine in dieser oder jener Hinsicht auszudrücken; man kann aber eine solche Redeweise annehmen, daß dieser Unterschied wegfällt, indem man, z. B. statt „die Strecken, sind in der Länge gleich" sagt „die Länge der Strecken ist gleich" oder „dieselbe", statt „die Flächen sind in der Farbe gleich" „die Farbe der Flächen ist gleich". Und so haben wir das Wort oben in den Beispielen gebraucht. In der allgemeinen Ersetzbarkeit sind nun in der That alle Gesetze der Gleichheit enthalten.»

necessariamente, os relaciona: poderia ser o caso que houvesse dois arruamentos de Lisboa com esses nomes – não havendo, então, identidade –, mas, no segundo caso, há uma relação necessária: qualquer triângulo equilátero é um triângulo equiângulo e vice-versa.

A defesa do extensionalismo deve-se ao facto de, para Frege, a intensão estar associada à individualidade de uma representação meramente psicológica e privada; e, portanto, a necessária objectividade da lógica implicaria o primado da extensão. Pelo contrário, Edmund Husserl, o criador da filosofia fenomenológica, defende uma lógica intensional. Em Husserl, a intensão é um *conteúdo ideal*, não é um conteúdo de uma certa (re)presentação – é um possível conteúdo de uma (re)presentação em geral. Um juízo predicativo operado por um sujeito é que instancia uma intensão: há, portanto, uma diferença entre *intenção significativa* e *intensão* ou conteúdo ideal. Por conseguinte, a intensão tem uma natureza claramente lógica e ideal, não tem um carácter psicológico-empírico, como Frege afirma. A lógica intensional, ao remeter os predicados para conteúdos ideais (i.e., para idealizações), foge, por um lado, à identificação psicologista entre a significação e a representação e evita, por outro, o desligamento entre o mundo e as linguagens natural e artificial, numa deriva idealista metafísica[6], que esquece o originário vínculo do conhecimento à realidade, através da percepção.

Ao invés, lidar com extensões é um pretenso modo da lógica garantir a sua objectividade, ou, pelo menos, uma objectividade material, pois a extensão não é formada pela idealização dos caracteres de entes, ela é formada pela subsunção das coisas naturais a pseudo-entidades imateriais – universais reificados:

> […] a especificação puramente extensional não é, em geral, o modo de definir um conceito, que todas as definições de conceitos são definições de conteúdos, e onde quer que o discurso seja uma definição de um conceito, pelos meios da sua

[6] Husserl é conhecido pelo seu *idealismo transcendental fenomenológico*, mas o seu idealismo tem um sentido novo. O *idealismo* é o oposto do *realismo*, os quais são teorias *gnosiológicas*, e não metafísicas. Muitas vezes, quando se fá-la em realismo, quer-se dizer *materialismo*, por oposição a imaterialismo ou a *espiritualismo*, e, portanto, há que distinguir entre realismo e idealismo gnosiológicos e realismo e idealismo metafísicos. Husserl mostra que um verdadeiro realismo metafísico é, necessariamente, um idealismo gnosiológico: a ciência, particularmente, a ciência filosófica, tem o objectivo de fundamentar o mundo – a existência do mundo é evidente, na vida prática, e a atitude teórica própria da ciência tem de explicitar o modo como mundo se doa aos sujeitos cognitivos. Se excluirmos, por um lado, o irracionalismo de uma metafísica panteísta, em que sujeito e mundo são identificados, e se ultrapassarmos, por outro, o cepticismo de uma epistemologia meramente "pragmática", verificamos que o mundo se doa através de presentações – de *ideias*, como se dizia no séc. XVII, e daí o termo «idealismo». Mas, na Idade Moderna, a *presentação* era vista como *re*-presentação, i.e., uma imagem interna criada pelo sujeito. A intencionalidade mostra que a presentação é a doação da coisa física, que, necessariamente, existe fora da consciência do sujeito. O idealismo transcendental fenomenológico respeita a relação/separação *sujeito--objecto*, refuta a hipótese do «génio maligno» cartesiano e ultrapassa o cepticismo da epistemologia tradicional, fundando cientificamente o conhecimento objectivo – cf. Husserl, *Cartesianische Meditationen*, § 41 (*Husserliana*, I).

> extensão, o que isso significa, e apenas pode significar, é uma definição indirecta do conteúdo conceptual a ser definido, por meios de outro conteúdo conceptual, que corresponde por equivalência ao primeiro, na virtude de ter a mesma extensão. E isto, por si só, é suficiente para fazer saber que o ideal de uma "lógica extensional", i.e., uma lógica que em princípio considera *apenas* extensões de conceitos, é fútil, porque é sem objecto.[7]

O conceito de objectividade de Frege e dos Analíticos não-nominalistas é o de que existe uma realidade dos universais. Mas afirmar a realidade do formal é defender implicitamente a ideia de que há uma superioridade dessa pretensa realidade dos universais face à realidade da coisa física, e que ela permite classificar e coleccionar as coisas materiais. Assim sendo, *uma alegada lógica objectiva – a lógica extensionalista – não é um primado do objecto, mas sim do atributo*. Isto em Frege é muito claro, pois a extensão não é a pluralidade dos objectos subsumidos (com depois será em Carnap, etc.), é um objecto abstracto – a classe (os objectos subsumidos enquanto unidade).

Para Frege, lógica é ontologia. É segundo esta premissa que a primeira tese da ontologia fregeana tem de ser entendida – a divisão entre *objectos* e *conceitos*. Esta separação ontológica de Frege entre o conceito e os indivíduos é uma hipostasiação, que tem um motivo exterior à semântica e à ontologia: tem um objectivo aritmético, que está ligado à investigação acerca da natureza do número. Frege, devido a um conceito radical de antipsicologismo (que rejeita qualquer recurso à experiência sensível na investigação lógica), pretendeu definir o conceito de número sem a remissão para intuições empíricas: o número ocorreria associado a conceitos, e não a objectos.

A tese de Frege de que os conceitos têm necessariamente extensões e de que as extensões são objectos abstractos – classes –, implica que os predicados sejam classes ou extensões. Só não o são, para Frege, devido à sua errónea separação entre sentido e "referência"[8]; mas, na verdade, *predicado e conceito são o mesmo*, e, assim sendo, verifica-se que Frege defende (ainda que implicitamente) que os predicados são classes. O atributo de um substrato e o conceito ou predicado de uma frase são a mesma noção epistémica. Ora, assim sendo, Frege defende um extensionalismo,

---

[7] Husserl, «Besprechung von E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*», *Husserliana*, XXII, p. 16. ««[...] die reine Umfangsangabe überhaupt kein Mittel ist, einen Begriff zu bestimmen, daß alle Begriffsbestimmung Inhaltsbestimmung ist, und daß, wo immer von der Bestimmung eines Begriffes durch seinen Umfang die Rede ist, gemeint ist und nur gemeint sein kann eine indirekte Bestimmung des zu definierenden Begriffsinhalts durch einen andern, ihm äquivalent entsprechenden, weil umfangsgleichen. Und dies hätte schon zu der Erkenntnis hingereicht, daß das Ideal einer "Umfangslogik", d.h. einer Logik, die prinzipiell nur auf Begriffsumfänge reflektiert, ein nichtiges, weil gegenstandsloses ist.»

[8] Frege diferencia sentido (*Sinn*) de significação (*Bedeutung*), o que é, à partida, uma clara ambiguidade; e os filósofos Analíticos tentam-na esconder, traduzindo «*Bedeutung*» por referência. Grafarei sempre, por isso, «referência», no sentido dos Analíticos, entre aspas.

embora rebuscado: o que faz é tornar os predicados em extensões, mesmo que estas sejam vazias, no caso de predicados inexistentes ou contraditórios. Por conseguinte, o seu *objectivismo semântico* (i.e., a sua reificação das significações e, logo, dos universais) é um extensionalismo: um extensionalismo idealista metafísico, pois as extensões são objectos, que nem são materiais nem são meras idealidades; porque, do ponto de vista fregeano, a defesa husserliana do carácter irreal das idealidades é um psicologismo. Frege pretende idealidades nem «sensíveis» nem «mentais» – para ele todo o mental é privado –; e, portanto, ao fugir do psicologismo, cai no platonismo da “visão” directa do inteligível. Até um fervoroso defensor do paradigma fregeano como Dummett admite que Frege não consegue explicar o modo como as idealidades são captadas pelo sujeito cognitivo:

> […] a teoria de Frege não é somente a de que um pensamento que estou a hospedar não é um conteúdo da minha mente, mas um constituinte de um realidade imaterial externa a ela; é, além disso, a de que a minha apreensão do pensamento não é mediada por algo na minha mente: ele é, sim, presentado à minha mente directamente – e todavia ele não é um conteúdo da minha mente. E esta concepção não é consistente.[9]

É interessante que os autores Analíticos não tenham visto as consequências metafísicas da semântica e da lógica de inspiração fregeana: o *espiritualismo metafísico*, particularmente, a ideia de que o pensamento (i.e., as proposições) existe realmente, é uma coisa, uma coisa espiritual, não sendo apenas uma potencialidade ideal – uma *omnitemporalidade*[10] –, que poderia ou não ser actualizada por uma intenção significativa de um sujeito. O conteúdo do conhecimento objectivo genuíno (i.e., as proposições verdadeiras) tem um carácter necessário; mas o acto de conhecer (e, por conseguinte, o conhecimento objectivo) não: a efectivação do conhecimento é uma possibilidade contida no ser, que depende da existência actual de seres inteligentes – antes ou depois destes, não há conhecimento, apesar de haver idealidades.

É paradigmática da incompreensão da essência espiritualista (i.e., idealista metafísica) do pensamento fregeano, por parte dos autores Analíticos, a leitura internalista e intensionalista que Hilary Putnam (um dos criadores da *teoria causal da “referência”*) faz de Frege. Putnam, atacando o descritivismo de Frege, diz:

---

[9] Michael Dummett, *Origins of Analytical Philosophy*, Londres (Duckworth), 1993, p.136. «[…] on Frege’s theory it is not merely that a thought which I am entertaining is not a content of my mind, but a constituent of an immaterial reality external to it; it is, further, that my apprehension of the thought is not mediated by anything in my mind: it is, rather, presented to my mind directly – and yet it is not a content of my mind. And this conception is not consistent.»

[10] «Allzeitlichkeit» – cf. Husserl, *Erfahrung und Urteil – Untersuchungen zur Genealogie der Logik*, Hamburgo (Felix Meiner), 1999 (1ª ed.: 1939), § 64, c).

«*Meanings just ain't in the head!*»[11] – «As significações simplesmente não estão na cabeça!». Mas os sentidos "estarem na cabeça" é a tese de Husserl, e não a de Frege; pois, para este último, as significações estão, *existem* num *terceiro domínio* nem material nem mental, ou seja, num *topos ouranios*. Por isso, Putnam erra quando interpreta a semântica fregeana como um *internalismo*. Apesar de, em Frege, a extensão de um termo ser determinada pela sua intensão, esta última não é, como em Husserl, a contraparte lógica da noção gnosiológica de *intenção significativa*. No pensamento husserliano, a *intensão* é o conteúdo de uma *intenção*; mas, na filosofia fregeana, não há *intencionalidade da consciência*, e, portanto, a intensão é uma Forma – é um *ente* espiritual. Frege é um externalista, só que não é um externalista empirista, como Putnam, Kripke, Donnellan, etc. (i.e., os defensores da teoria causal da "referência"): Frege é externalista racionalista, ou seja, é um idealista metafísico, apesar de não o defender explicitamente, como Platão ou Bolzano; porém, o seu pensamento, para ser coerente, implica a existência de um outro-mundo espiritual. É compreensível que os filósofos Analíticos não-descritivistas subsumam o pensamento de Frege ao intensionalismo (fazendo-o, erroneamente, aproximar-se do internalismo), pois o idealismo metafísico implícito de Frege vai contra o naturalismo Analítico; e, portanto, ver claramente o pensamento fregeano implicaria que a Escola Analítica ficasse sem o seu "apóstolo". *Toda a Filosofia Analítica é extensionalista (e consequentemente externalista)*: Frege é um ex-tensionalista/externalista com significações; e Putnam é um extensionalista/externalista sem significações. Husserl, esse sim, é um internalista. A posição filosófica que os autores Analíticos denominam por internalismo, se for desenvolvida consequentemente, é um intencionalismo da consciência, e já não se trata apenas de uma tese semântica, mas sim de uma tese gnosiológica.

A semântica de Putnam tem um cariz *pragmático*[12], não é uma teoria *entitativa* do sentido, como as de Frege e Husserl. Para Putnam, as significações não são idealidades (daí não "estarem na cabeça"); e, assim sendo, o sentido torna-se a representação – a teoria causal da "referência" repete, ainda que inadvertidamente, a teoria psicologista da significação. Esta reiteração da doutrina do sentido do empirismo psicologista do séc. XIX (Mill, Schröder, etc.) é muito natural, pois só há três hipóteses para o estatuto da significação: *ou a significação é uma Forma; ou ela é um conteúdo mental; ou ela é a representação do objecto referido* – ou seja, ou o

[11] Hilary Putnam, «The meaning of "meaning"» *in* idem, *Mind, Language and Reality*. Cambridge (CUP), 1975, pp. 215-271.

[12] A filosofia da linguagem Analítica divide-se em três disciplinas: sintaxe, semântica e pragmática (i.e., a doutrina do contexto e do uso).

sentido está num pretenso mundo espiritual ou na mente ou no mundo[13]. Os Analíticos antidescritivistas são incoerentes: apercebem-se do idealismo metafísico de Frege (mesmo não lhe dando este nome), mas como partilham o anti-subjectivismo obcecado daquele (i.e., a ideia de que o sentido não pode ser o conteúdo mental), condenam-se, inevitavelmente, ao empirismo.

A mesma consequência teórica acontece com um fregeano muito peculiar: B. V. Biryukov, um lógico soviético, que, apesar de ser um grande entusiasta de Frege, aponta as inconsistências da filosofia fregeana, no que toca à relação entre o particular e o universal e a sua consequente queda no idealismo metafísico. Biryukov, como não trabalha no paradigma Analítico (pertencendo ao movimento do materialismo dialéctico), é bem ciente das consequências idealistas metafísicas de certas teses de Frege:

> Mas, em Frege há um claro exagero do papel do universal, uma certa separação entre as propriedades comuns e os objectos nos quais essas propriedades comuns existem e se revelam, uma falta de precisão no que concerne à relação entre objecto e conceito. […] Apesar de todas as suas explicações, o leitor dos seus trabalhos não se consegue livrar de um sentimento estranho: parece sempre como se o autor não tivesse acabado de dizer algo; assim, gostar-se-ia de perguntar o que é, no fundo, o conceito fregeano. Do ponto de vista da explicação de Frege, segue-se que é, num certo sentido, a propriedade comum das coisas; mas Frege não diz isto directamente. Mais ainda, por que é que Frege toma o termo *conceito* num sentido diferente do usual (conceito – *a reflexão mental* das coisas)? Por que é que ele responde vagamente à questão sobre a relação entre objectos e propriedades comuns? […] Numa série de pontos (*e.g.*, na questão sobre a origem das verdades aritméticas) a inconsequência de Frege [...] levou-o ao idealismo.[14]

Biryukov defende o fregeanismo na sua rejeição da lógica intensional e do pretenso subjectivismo a ela ligado[15]. Contudo, não lhe agradam as componentes

---

[13] Há uma pretensa quarta hipótese: o sentido ser o *uso*. Mas esta tese olvida a própria essência da linguagem, que é a necessária partilha de signos e das suas respectivas significações, para que seja possível a comunicação. Por conseguinte, não se trata de uma verdadeira hipótese.

[14] Б. В. БІРЮКОВ, «О РАБОТАХ ФРЕГЕ ПО ФИЛОСОФСКИМ ВОПРОСАМ МАТЕМАТИКИ», *ПРИМЕНЕНЙ ЛОГИКИ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ* [«Sobre os trabalhos de Frege acerca dos problemas filosóficos da matemática» in *Aplicações lógicas na ciência e na técnica*], Izd. AN SSSR, Moscovo, 1959, pp. 162-163. «Но у Фреге было определенное преувеличение роли общего, известный отрыв общих свойств от предметов, в которых эти общие свойства существуют и проявляются, недоговоренность об отношении между предметом и понятием. […] Несмотря на все его разъяснения, читателя его трудов не покидает странное чувство: кажется, будто автор все время что-то не договаривает; так и хочется спросить, что же такое в сущности фрегевское понятие. Из объяснений Фреге явствует, что это в некотором смысле общее свойство вещей, но Фреге не говорит этого прямо. Далее, почему Фреге прибегает к термину *понятие* в смысле, отличном от обычного (понятие – *мысленный образ* вещей)? Почему он так смутно отвечает на вопрос об отношении между предметами и общими свойствами? […] В ряде пунктов (например, в вопросе об источнике арифметических истин) непоследовательность Фреге […] приводили к идеализму.»

[15] «Frege foi um inimigo do empirismo, do nominalismo e do subjectivismo. As suas ideias diferem essencialmente do ponto de vista nominalista-empirista, o qual nega a realidade do universal. Esta é a sua

claramente platónicas da filosofia de Frege. O que é peculiar na interpretação biryukoviana de Frege é o facto de a crença no extensionalismo e a crença no materialismo entrarem em choque. A posição de Frege é errada, mas é consistente: ele reifica o universal, adoptando a solução platónica para o problema da objectividade do conhecimento. Tal como Frege, Biryukov rejeita, por preconceito, uma filosofia da *subjectividade transcendental* (preconceito que é até mais forte do que o de Frege, devido ao positivismo extremo do materialismo dialéctico); no entanto, e ao contrário de Frege, defende uma metafísica materialista. É esta posição filosófica de Biryukov que lhe permite ver defeitos do pensamento de Frege que nenhum fregeano Analítico pode ver. É que, ao contrário dos Analíticos, Biryukov não tem uma preocupação meramente "técnica" acerca dos problemas lógico-matemáticos: ele tem uma posição filosófica forte, que procura articular com as questões técnicas – daí a idiossincrasia da sua leitura de Frege. Na verdade, o projecto de Biryukov é incoerente: usa uma lógica e uma gnosiologia platónica (i.e., o pensamento de Frege) como meio para defender uma metafísica materialista – ele remete a solução das contradições do fregeanismo para uma sua depuração através da dialéctica do materialismo marxista-leninista. O seu anti-sub-jectivismo é inconsistente como o de Putnam, pois, tal como este, procura dar objectividade à ciência a partir de um conhecimento estritamente empírico; mas, por isso, Biryukov é ainda mais incoerente do que Putnam, ao tentar pôr uma lógica e uma gnosiologia com consequências idealistas metafísicas ao serviço de uma metafísica materialista.

A interpretação biryukoviana é reveladora do idealismo metafísico inerente às ideias de Frege, pelo facto de, ao defender a sua lógica extensionalista[16], encontrar os seus defeitos metafísicos – coisa única nos fregeanos, que quando criticam Frege, só aponta os seus problemas "técnicos", formais (paradoxo de Russell, etc.). No fundo, Biryukov apercebe-se, inadvertidamente, que *o primado fregeano da extensão*

---

indisputável contribuição para a filosofia da matemática.» – *ibid.*, p. 162 [«Фреге был противником эмпиризма, номинализма и субъективизма. Его взгляды в корне отличаются от точки зрения эмпирика-номиналиста, отрицающего реальность общего. В этом его бесспорная заслуга перед философией математики.»].

[16] «Frege condenou categoricamente a teoria idealista-subjectiva do juízo como conexão de representações. A lógica psicologista está no caminho errado quando considera o sujeito e o predicado do juízo como representações no sentido da psicologia. Se todo os sujeitos e predicados são apenas representações, então é impossível atingir algo objectivo. [...] Frege estava totalmente certo em pensar que a proposição, no juízo, está relacionada com o próprio objecto; e, logo, se pode falar sobre a sua verdade ou falsidade.» – *ibid.*, p. 141 [Категорически осудил Фреге субъективно-идеалистическую теорию суждения как связи представлений. Психологическая логика стоит на ложном пути, когда она рассматривает субъект и предикат суждения как представления в смысле психологии. Если все субъекты и предикаты являются только представлениями, то нельзя достичь чего-либо объективного. [...] Фреге совершенно правильно считал, что в суждении высказывание относится к самому предмету и что именно поэтому может идти речь об его истинности или ложности.].

implica a reificação dos predicados; ou seja, o extensionalismo acarreta um idealismo metafísico.

2. Lógicas intensional e modal – A necessidade de uma interpretação semân-tica e ôntico-formal do cálculo dedutivo

O séc. XX foi um período em que o aparato técnico da lógica aumentou muito. Esse incremento deu-se pela necessidade de se tentar resolver questões fundamentais no seio da ciência matemática. Com isso, a lógica matemática institui-se como disciplina, e ganhou um lugar preponderante. Estas inovações "técnicas", no âmbito de uma lógica que procura fundamentar a matemática, arrastaram consigo toda a lógica e, consequentemente, toda a filosofia teórica, para as questões da filosofia da matemática. Esta área filosófica é o grande terreno de combate da filosofia dos nossos tempos. Esses avanços da lógica, particularmente, da lógica simbólica, deram um pendor platónico à investigação filosófica coeva. O platonismo matemático foi visto como uma âncora de esperança, num século em que a rainha da ciência experimental – a física –, após as primeiras décadas gloriosas, mergulhou num empasse. A evolução da lógica simbólica e da lógica matemática foi uma réstia de optimismo, num século de cepticismo. Só que este motivo de esperança, para muitos, nesta crise da ciência ocidental (que já Husserl anteviu, nos meados dos anos 30[17]), tem sido um falso ídolo. A crise do conhecimento objectivo, o seu desmembramento e especialização exacerbada, numa fuga para frente sem destino (i.e., sem fio-condutor), ainda é acentuada pela atitude platónica vinda da matemática. Esse platonismo consiste num primado da sintaxe e, consequentemente, da extensão sobre a semântica e, logo, a intensão, o qual hipostasia pretensos objectos científicos, tendo como fundamento resultados meramente sintáctico, i.e., simbólicos. Por conseguinte, para este formalismo[18] platónico extensionalista, pretensas proposições analíticas *a priori* são a base da matemática.

Como reacção ao platonismo matemático, surgiu o chamado intuicionismo – uma versão radical do construtivismo em matemática. Se a filosofia da matemática platonista implica um idealismo metafísico inaceitável, esta resposta "intuicionista" é demasiado radical, caindo no erro oposto: o psicologismo e o relativismo. Os paradoxos do pensamento matemático platonista não significam a necessidade de um

---

[17] Cf. *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie: Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie*, Belgrado, 1936 (*Husserliana*, VI).

[18] Uso aqui o termo no seu sentido geral filosófico, e não no sentido particular que ele tem na filosofia da matemática.

novo tipo de matemática, mas apenas de um novo tipo de *interpretação*. O platonismo matemático é uma consequência da lógica existencialista – as extensões e os valores-de-verdade prevalecem sobre as intensões e as proposições:

> [...] seremos bem capazes de afirmar que "o conceito de duas palavras conceptuais é o mesmo se, e somente se, as extensões dos conceitos correspondentes coincidem", sem sermos desviados pelo uso indevido da expressão "o mesmo". E, com esta afirmação, fizemos, creio eu, uma importante concessão aos lógicos extensionalistas. Eles estão certos quando mostram a sua preferência pela extensão, contra a intenção, do conceito que diz respeito à referência, [*Bedeutung*] e não ao sentido [*Sinn*] das palavras, como a coisa essencial para a lógica. Os intensionalistas estão apenas demasiado felizes por não irem além do sentido, pois o que eles chamam a intensão, se não é uma representação [*Vorstellung*], não é nada mais do que o sentido. Esquecem-se que a lógica não está preocupada com a forma como pensamentos, independentemente dos valores-de-verdade, se seguem a partir de pensamentos, que o passo desde do pensamento até ao valor-de-verdade – mais geralmente, o passo do sentido para a referência [*Bedeutung*] – tem que ser dado.[19]

Ao contrário do que Frege afirma, não é verdade que uma lógica intensionalista opere, necessariamente, com estados-de-coisas independentemente dos seus valores-de-verdade: Husserl, em «O Cálculo Dedutivo e a Lógica do Conteúdo»[20] (1891), demonstra-o, através de uma interpretação intensionalista do cálculo lógico extensionalista de Ernst Schröder, que mantém todas as características operativas do sistema schröderiano[21]. A significação de uma proposição (ou seja, o sentido de um estado-de-coisas enquanto mera suposição) implica um "*valor-de-possibilidade*" desse estado-de-coisas. Apesar da lógica modal não ser acerca de valores-de-verdade, as modalidades dos juízos determinam *a priori* as possibilidades de valores-de-verdade.

Por outro lado, esse objectivo fregeano de uma lógica de valores-de-verdade ou de "referências" implica uma filosofia *actualista*. De uma perspectiva *possibilista*, os sentidos e as proposições tornam-se, claramente, o objecto da lógica. Não pode ser

---

[19] Frege, *Posthumous Writings*, Oxford (Basil Blackwell), 1979, p. 122. «[…] we shall be well able to assert that "what two concept-words mean is the same if and only if the extensions of the corresponding concepts coincide" without being led astray by the improper use of the word "the same". And with this statement we have, I believe, made an important concession to the extensionalist logicians. They are right when they show by their preference for the extension, as against the intension, of concept that they regard the meaning [*Bedeutung*] and not the sense [*Sinn*] of words as the essential thing for logic. The intensionalists are only too happy not to go beyond the sense; for what they call the intension, if it is not an idea [*Vorstellung*], it is nothing else than the sense. They forget that logic is not concerned with how thoughts, regardless truth-value, follow from thoughts, that the step from thoughts to truth-value more generally, the step from sense to meaning – has to be taken.»

[20] «Der Folgerungscalcul und die Inhaltslogik» – *Husserliana*, XXII, p. 44-72.

[21] Ver Giorgio Scrimieri, *Analitica matematica e fenomenologica in Edmund Husserl*, Bari (Edizioni Levante), 1979, «Proposte per un calcolo di contenuti», pp. 221-256.

atribuído um valor-de-verdade às proposições sobre o futuro contingente; nesses casos, deve-se falar, sim, em possibilidade ou impossibilidade. O pensamento lógico de Husserl é fortemente modal: o "*valor-de-possibilidade*" de uma proposição é formalmente anterior ao seu valor-de-verdade. Como diz Mohanty, Husserl (ao contrário de Quine, que tem uma lógica proposicional de frases, e de Frege, que tem uma de valores-de-verdade) tem uma lógica proposicional de «pensamentos»[22] – i.e., de *supostos estados-de-coisas enquanto tais*[23]. Em Husserl, as frases não referem *objectos reais não-sensíveis* – o Verdadeiro ou o Falso –, como em Frege, mas estados-de-coisas efectivos ou não-efectivos. As proposições são estados-de-coisas enquanto supostos, porque sentido e referência são termos sinónimos – cf. Husserl, *Logische Untersuchungen*, II, 1, § 15[24]. O que o conceito fregeano de *Bedeutung* pretende, desastradamente, é designar as intenções significativas que visam objectos reais. É o modo pragmático, e, logo, simplista, com que Frege tenta superar, no seu pensamento, a sua ignorância do *princípio da intencionalidade da consciência*. Uma significação visa sempre um objecto, seja este real, impossível, possível, provável, duvidoso, hipotético, etc.; portanto, uma proposição não tem como referência o seu valor-de-verdade, mas sim um estado-de-coisas com uma certa modalidade. A teoria do juízo de Husserl não desliga os *juízos de percepção* da *realidade*, à qual se reportam – "A ponte 25 de Abril é vermelha." não refere o Verdadeiro, refere um atributo *desse* objecto real, i.e., refere um facto – e, por outro lado, mostra que as proposições sobre objectos inexistentes referem estados-de-coisas com modalidades diferentes da efectividade: "decaedro regular" visa um estado-de-coisas impossível; "O Sahara irá aumentar, nos próximos anos" visa um estado-de-coisas provável; "prédio com mil metros de altura" visa um estado-de-coisas possível, etc. Atente-se que, segundo a teoria do juízo de Frege, tanto "2+2=4" como "O Mondego nasce na Serra da Estrela" têm a mesma 'referência' – o Verdadeiro –; por conseguinte, a importantíssima diferença lógica entre a necessidade do primeiro estado-de-coisas e a mera efectividade (i.e., a contingência) do segundo é diluída. Provavelmente, a tese mais platónica (i.e., mais metafisicamente idealista) da teoria de Frege é a sua distinção bizarra entre *Sinn* (sentido) e *Bedeutung* (significação), que separa

[22] «'Propositional logic' may be construed *either* as logic of sentences, or logic of thought, or logic of truth-values. Husserl chooses the second, Frege the third (and Quine the first) alternative.» – Mohanty, *Husserl and Frege*, pp. 93-94.

[23] «[…] o juízo no sentido da lógica apofântica é um suposto estado-de-coisas enquanto tal […]» – Husserl, *Formale und Transzendentale Logik*, §45 (*Husserliana*, XXII, p. 132) [«(…) Urteile im Sinne der apophantischen Logik sind vermeinte Sachverhalte als solche (…)»].

[24] «*Significação* vale para nós como *sinónimo* de *sentido*.» – Husserl, *Logische Untersuchungen*, II, 1, §15 (*Husserliana*, XIX/2, p. 59); «[…] usar com sentido uma expressão e referir-se, expressando, ao objecto (representar o objecto) é tudo o mesmo.» – *ibid*. [«*Bedeutung* gilt uns ferner als gleichbedeutend mit *Sinn*.»; «[…] eine Ausdruck mit Sinn gebrauchen und sich ausdrückend auf den Gegenstand (den Gegenstand vorstellen) ist einerlei.»].

realmente as proposições dos estados-de-coisas, reificando, assim, os sentidos ou significações (os *Sinne*) – o «terceiro domínio» de Frege, que nem é físico nem mental.

Para Frege, todos os conceitos têm uma extensão – *quinta lei fundamental da aritmética* –, que é a sua classe. Logo, até conceitos impossíveis como a quadratura do círculo têm uma extensão. Assim sendo, as classes de objectos não-existentes são tratadas da mesma maneira do que as classes reais. As práticas lógicas e matemáticas tornam-se um cálculo cego, apenas preocupado com a sua coerência, e sem qualquer atenção ao seu sentido, o que, muitas vezes, produz resultados contraditórios e paradoxos. Uma verdadeira dedução científica implica inferir uma conclusão com sentido de premissas com sentido. Husserl, na sua recensão sobre *Vorlesung über die Algebra der Logik*[25] de Schröder (um texto de 1891), já fala sobre isso, onze anos antes da carta de Russell a Frege, onde o chamado *paradoxo de Russell* (que é causado pelo extensionalismo da quinta lei fundamental da aritmética de Frege) é exposto – aliás, um paradoxo, já à época conhecido por Zermelo e outros matemáticos de Gotinga[26]. A mera fundação axiomática (i.e., sintáctico-simbólica) da lógica não pode produzir uma teoria da ciência. O critério da consistência formal é insuficiente para uma verdadeira fundamentação da lógica, pois nenhuma sequência de símbolos pode ser autofundante. Mais do que qualquer outra área científica, a lógica precisa de uma explicitação do seu sentido. Deve ser explicado o processo cognitivo que mostra o apodicticidade dos axiomas da lógica.

O logicismo não explica a origem cognitiva das *provas* acerca do conhecimento formal (i.e., as deduções das disciplinas aprióricas): ele permanece aberto à velha ideia platónica da existência de um mundo espiritual dos inteligíveis, que veríamos por uma visão mental, e que seria directamente vertido nos signos das inferências simbólicas. Além disso, esta natureza platónica do logicismo e, também, do platonismo matemático *stricto sensu*[27] permitem excessos de formalismo, porque acreditam que tudo o que decorre de algoritmos sem contradição existe. Assim, o *platonismo tradicional* é muitas vezes chamado *realismo ingénuo*. Esse critério da "não-contradição" tem de ser substituído por um critério da "*não-impossibilidade*",

[25] *Husserliana*, XXII, pp 3-43.

[26] Cf. Claire Ortiz Hill, «Husserl's mathematical apprenticeship and philosophy of mathematics» *in* Anna-Teresa Tymieniecka (coord.), *Phenomenology world-wide*, Haia (Springer), 2002, p. 84.

[27] Por vezes, na filosofia da matemática, fala-se de logicismo e de platonismo como teorias essencialmente diferentes: o segundo seria, até, uma solução para o falhanço do primeiro; pois, pretensamente, não implicaria a consistência formal, da qual o logicismo depende, e, assim, os axiomas do platonismo seriam proposições de "existência", directamente deduzidas. No entanto, de um ponto de vista estritamente filosófico, e não apenas "técnico", ambas as posições tem o mesmo cariz platónico de crença na existência de um mundo das entidades formais, paralelo ao mundo material, e de uma visão directa dessa esfera inteligível.

porque o não-absurdo não é necessariamente não-contraditório, isto é, uma mera possibilidade sintáctica (não-contradição) não significa possibilidade semântica (possibilidade "real"). É necessário, então, uma *lógica apofântica* – uma lógica dos possíveis estados-de-coisas –,[28] a qual é derivada de uma *ontologia formal* – uma lógica dos objectos possíveis[29]. No fundo, a lógica apofântica – i.e., uma lógica do conteúdo das proposições – é a ideia kantiana dos juízos sintéticos *a priori* libertada, pela lógica modal, do psicologismo e antropologismo dos chamados conceitos *a priori* do entendimento.

A abordagem fenomenológica mostra que os axiomas simbólicos são fórmulas vazias, que só pode ter um sentido genuíno, se elas forem preenchidas pelas operações cognitivas – as *intuições categoriais* – que doam ao sujeito os objectos e as leis que são simbolizados por essas fórmulas. Os algoritmos simbólicos não doam a "realidade" matemática em si: eles são linguagem, são meros signos, não são as próprias estruturas matemáticas da realidade. A "realidade" matemática é apreendida pelo sujeito cognitivo, através de intuições de objectos ideais ou categoriais, produzidos pela fantasia[30], que surgem desta variar os caracteres do material perceptivo e captar o que permanece idêntico. Deste modo, a fantasia faz a *idealização* dos atributos da coisa física e *constitui* as estruturas da realidade, i.e., as significações, os conceitos, as proposições, as leis, etc. Por conseguinte, as idealidades científicas não "descem" directamente de um pretenso mundo inteligível, para aterrarem em fórmulas num papel ou num quadro: elas existem, apenas, enquanto potencialidades necessárias (e, consequentemente, omnitemporais), que podem ser instanciadas por um sujeito cognitivo.

Na recensão sobre *Vorlesung über die Algebra der Logik*, é apontado, ao pensamento lógico de Schröder, este tipo de erros, *lato sensu*, formalistas. Husserl mostra que a teoria da dedução não é apenas um cálculo algébrico ou algorítmico, e que, por conseguinte, a dedução implica uma *interpretação* do cálculo. A componente semântica não pode ser ignorada. O cálculo algébrico é apenas uma parte da dedução: daí a insuficiência do critério da simples consistência formal (i.e., sintáctica) do cálculo. A dedução é verdadeira se for sobre classes existentes. Um cálculo consistente pode, também, ser acerca de classes fictícias ou impossíveis. Mas, nesse

[28] Cf. Husserl, *Logische Untersuchungen*, II, 4 (*Husserliana*, XIX/2).
[29] Cf. Husserl, *Logische Untersuchungen*, II, 3(*Husserliana*, XIX/2).
[30] O que Husserl chama «fantasia» [*Phantasie*] é aquilo que, vulgarmente, na filosofia, se denomina «imaginação». Todavia, esta última designação é imprecisa, por confundir a parte com o todo: podemos fantasiar um quadrado redondo, e não o podemos imaginar, pois a imaginação implica imagem – daí a imaginação ser apenas uma parte (ainda que a maior) da fantasia. Ela é uma importante capacidade cognitiva, pois permite trabalhar o material perceptivo e expandir os seus caracteres, pensando estados-de-coisas possíveis e, também, impossíveis.

caso, não é um cálculo real de *multiplicidades*[31]; e, portanto, não é uma dedução, em sentido próprio, i.e., uma verdadeira inferência científica. Antes do algoritmo dedutivo, é necessário traduzir os juízos da linguagem natural em proposições simbólicas equivalentes, e só depois disso é que pode ser operado o cálculo. Em seguida, há que traduzir a proposição simbólica da conclusão no juízo equivalente. Por conseguinte, há uma diferença entre *cálculo* e *dedução*:

> Os sinais são meros suportes para a conceptualização de conceitos genuinamente intencionados [...] E a actividade de julgar vai passo-a-passo, não sobre os sinais, mas sim sobre os próprios objectos, que os signos simbolizam. [...] Mas, mesmo nestas disciplinas [que trabalham pelo algoritmo] não pode ser legitimamente alegado que os sinais formam o único objecto de consideração. No processo de cálculo é que certamente não é necessária a reflexão sobre os conceitos subjacentes aos sinais. [...] Porém, o cálculo não é a dedução total, mas sim um elemento da mesma. Parte-se da "fixação da equivalência", ou seja, da substituição do problema por um problema algorítmico correspondente, equivalente ao antigo pelas regras do método simbólico. Por outro lado, o cálculo é seguido pela "interpretação": a conversão da fórmula final no juízo absolutamente correspondente.[32]

A clivagem entre dedução e cálculo deriva da diferença entre *linguagem* e *cálculo*. Os signos da lógica simbólica remetem para uma metalinguagem que lhe dá sentido – a linguagem natural –; esta, por sua vez, remete para o pensamento puro, o qual tem o seu lugar de origem na percepção. A ideia wittgensteiniana de que a linguagem natural é a causa das aporias filosóficas e de que a linguagem simbólica expressa o puro pensamento é incorrecta. Tanto a linguagem natural como a linguagem artificial da lógica simbólica são "inautênticas": ambas são apenas tentativas de equivalência ao puro pensamento, e não ele próprio:

---

[31] A lógica pode operar com termos abstractos e as suas necessárias relações – e, nesse caso, é uma *lógica puramente formal* –, ou pode operar dentro de um domínio concreto, o qual tem as suas idealidades correspondentes – sendo, assim, uma *lógica material*. É este segundo tipo de lógica que opera com *multiplicidades* [*Mannigfaltigkeiten*] – conceito husserliano inspirado na geometria de Riemann, a qual (usando esta expressão de Husserl) demonstrou que a geometria euclidiana é apenas uma multiplicidade da geometria em geral. O cálculo é, então, a esfera da lógica formalmente "vazia", enquanto a dedução implica trabalhar com multiplicidades, ou seja, tem um cariz material, pois possui um conteúdo, daí que uma verdadeira dedução não seja uma mera técnica inferencial mas, sim, uma inferência científica concreta.

[32] Husserl, Besprechung von E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*», *Husserliana*, XXII, p. 10. «Die Zeichen sind bloße Stützen für die Konzeption der eigentlich intendierten Begriffe […] Und die Urteilstätigkeit geht Schritt für Schritt nicht auf die Zeichen, sondern auf die durch sie symbolisierten Gegenstände selbst. […] Daß aber die Zeichen den einzigen Gegenstand der Beachtung bilden, kann auch für diese Disziplinen mit keinem Recht behauptet werden. Im Verlaufe der Rechnung bedarf es allerdings keiner Reflexion auf die den Zeichen zugrunde liegenden Begriffe, sondern ausschließlich auf die Regeln der Zeichen, die „Gesetze" des Kalküls. Aber die Rechnung ist nicht die ganze Deduktion, sondern nur ein Glied derselben. Ihr geht vor das „in Gleichung Setzen", also die Ersetzung der Aufgabe durch eine ihr nach den Regeln der Zeichenmethode äquivalent entsprechende Algorithmische Aufgabe. Andererseits folgt ihr nach die „Interpretation", die Umsetzung der Endformeln in die regelrecht korrespondierenden Urteile.»

> Uma língua não é um método simbólico para a derivação sistemática de conclusões, e um cálculo não é um método para a expressão simbólica sistemática dos fenómenos mentais. A função peculiar da *linguagem* consiste na expressão simbólica dos fenómenos mentais, expressão que nós, em parte necessitamos, para a comunicação desses fenómenos e, em parte, como necessidade de apoio sensual para os nossos próprios movimentos internos de pensamento. A arte correspondente à designação linguista é a gramática. Assim, a gramática não nos ensina como devemos julgar, e também não oferecem regras a respeito de como podemos derivar juízos indirectamente, através de mecanismos simbólicos. Pelo contrário, só nos ensina como devemos expressar juízos correctamente na linguagem. Por outro lado, a função peculiar do *cálculo* consiste em ser um método para a derivação de conclusões simbólicas dentro de uma determinada esfera do conhecimento. Assim, é uma arte que, através de uma simbolização adequada de pensamentos, substitui, por um processo de cálculo – ou seja, um processo regido por regras de transposição e substituição de sinais por sinais –, o real inferir, e, em seguida, por meio da correlação de símbolos e pensamentos executada no princípio, ele deriva os juízos desejados a partir das fórmulas finais resultantes. E mesmo essa correlação, o que constitui uma parte do processo simbólico de derivação, não tem o carácter de denominação linguística. Para a função do sinal aqui absolutamente não é a de acompanhar o *pensamento como a sua expressão*.[33]

Na verdade, a linguagem natural é uma poderosa faculdade que auxilia a cognição humana, e, por esta questão de origem, está bem mais próxima dos actos mentais que constituem o puro pensamento do que a linguagem da lógica simbólica. Por isso, as estruturas lógicas primordiais e "autênticas" estão reproduzidas na linguagem natural, e o que a lógica simbólica faz é traduzir esses juízos em proposições equivalentes mas não iguais[34], com o objectivo de facilitar o cálculo dedutivo, através de uma linguagem muito mais compacta, que permite computar grandes algoritmos.

Husserl, em «O Cálculo Dedutivo e a Lógica do Conteúdo», refere a

---

[33] *Ibid.*, p. 21. «Die sprache ist keine Methode systematisch-symbolischer Schlußfolgerung, der Kalkül keine Methode systematisch-symbolischer Außerung der psychischen Phänomene. Die eigentümliche Leistung der *Sprache* besteht im symbolischen Ausdruck psychischer Phänomene, dessen wir teils für die Mitteilung derselben, teils als sinnliche Stütze für die eigene innere Gedankenbewegung bedürfen. Die zugehörige Kunst sprachlicher Bezeichnung ist die Grammatik. Sie lehrt also nicht, wie wir urteilen sollen, sie gibtauch nicht Regeln, wie wir richtige Urteile indirekt durch symbolische Kunstgriffe herleiten können, sondern nur, wie wir Urteile der Sprache gemäß richtig auszudrücken haben. Auf der anderen Seite besteht die eigentümliche Leistung des *Kalküls* darin, für eine gewisse Erkenntnissphäre eine Methode symbolischer Schlußfolgerung zu sein; also eine Kunst, durch passende Signierung von Gedanken dem wirklichen Schließen ein Rechnen, d.h. ein regelrechtes Umsetzen und Ersetzen von Zeichen durch Zeichen zu substituieren, und dann, vermöge der anfangs vollzogenen Zuordnung von Gedanken und Zeichen, aus den resultierenden Endformeln die gewünschten Urteile herzuleiten. Und selbst diese *Zuordnung*, welche einen Teil des symbolischen Schlußprozesses ausmacht, hat nicht den Charakter einer sprachlichen Bezeichnung: Denn die Funktion der Zeichen ist es hier durchaus nicht, die *Gedanken als ihr Ausdruck* zu begleiten.»

[34] Por exemplo, ao juízo «Todos os homens são mortais.» equivale a proposição «O conceito ideal de homem inclui o de mortalidade.» – cf. Husserl, «Der Folgerungskalkül und die Inhaltslogik», *Husserliana*, XXII, p. 49.

necessidade e mostra a possibilidade de uma *interpretação intensional* do cálculo dedutivo. Husserl de-reifica a lógica de Schröder num cálculo não de classes (extensões) mas de conteúdos conceptuais (intensões). *A dedução não é* apenas uma operação sintáctica – não é apenas *cálculo*. E isto é assim porque *o cálculo não é linguagem*: o cálculo é um auxiliar da linguagem, não é um seu substituto mais rigoroso. Por conseguinte, o cálculo tem de estar subordinado à análise linguística, nomeadamente, a uma interpretação semântica. Uma dedução com sentido implica uma interpretação do cálculo, que o depure das hipóteses meramente sintácticas, as quais têm *sentidos contraditórios*[35]; ou seja, são possibilidades sintácticas mas não são possibilidades semânticas, e, portanto, não são verdadeiras possibilidades – i.e., possibilidades ontológicas, e não apenas linguísticas.

O que é próprio da linguagem natural é o seu carácter fundamentalmente *semântico*. A sintaxe é apenas o lado combinatório, formal da linguagem. A semântica, pelo contrário, é o plano "material" e, consequentemente, cognitivo da linguagem. É a natureza semântica da linguagem que está por detrás da intencionalidade e do juízo: é isso que a permite descrever o mundo, é isso que a liga à percepção, e faz com que ela não seja uma mera instanciação de proposições-em-si desligadas do real.

A semântica depende da sintaxe; porém, esta não é, na sua essência, um mero conjunto de possibilidades combinatórias. Há uma sintaxe "material" da qual depende a sintaxe formal ou combinatória. Antes da experiência linguística, há a experiência primordial que é a percepção, e esta já é categorialmente estruturada. A presentação está estruturada numa relação substrato/qualidades; por exemplo: na percepção de uma folha de papel branca, a extensão é o substrato e a qualidade é a brancura, daí a forma clássica do juízo ser 'Sujeito-*cópula*-predicado.' – "A folha *é* branca.". A proposição é apenas a ascensão ao nível linguístico de uma natureza lógica que lhe é anterior; ou seja, é a passagem da *experiência antepredicativa*[36] à *experiência predicativa*: na primeira, dão-se *sínteses passivas ou receptivas* – é o plano da percepção –; na segunda, pelo contrário, dão-se *sínteses activas ou intencionais* – é o plano do juízo. Há, então, um *sintáctico antepredicativo*[37] (o qual corresponde às

---

[35] Husserl diferencia o *absurdo* do *contra-senso*: o primeiro tipo de signos não significa, i.e., não tem conteúdo lógico, como "abracadabra" ou "verde é ou"; o segundo tem um conteúdo lógico contraditório, como "quadrado redondo" ou "superfície sem extensão" – Cf. *Logische Untersuchungen*, II, 1, §15 (*Husserliana*, XIX/2, p. 59).

[36] Cf. Husserl, *Formale und Transzendentale Logik*, §86 e *Erfahrung und Urteil*, §6.

[37] «Nas minhas *Investigações Lógicas* II (6ª Invest.), é introduzido o conceito de categorial pela primeira vez, exclusivamente no que concerne à sintaxe no juízo. Não tinha sido ainda distinguido entre o sintáctico em geral, que aparece já na esfera antepredicativa […] e o sintáctico na esfera específica do juízo.» – Husserl, *Formale und Transzendentale Logik*, §86, n. 2 – *Husserliana*, XVII, p. 220. («In meinen Logischen Untersuchungen II, 6. Unters., wurde der Begriff des Kategorialen zuerst eingeführt, ausschließlich in der Blickrichtung auf das Syntaktische im Urteil. Es wurde noch nicht geschieden:

estruturas lógicas originais e "materiais") que é vertido no juízo de percepção, sendo o sintáctico formal a idealização dessas estruturas ontognosiológicas. O juízo de percepção, com a sua síntese entre um substrato e um atributo, é o ponto de partida da lógica, interpretada na sua devida radicalidade. Husserl distingue entre a *lógica formal*, i.e., a lógica tradicional (seja ela simbólica ou não) e a *lógica transcendental*, que é a explicitação da génese cognitiva dos objectos e leis da lógica[38]. A *lógica transcendental* não é uma "filosofia da lógica", ou seja, uma interpretação especulativa da natureza da lógica; ela é a explicação científica da origem das intuições que fundam a lógica[39]. A filosofia fenomenológica centra-se nos dados de uma nova ciência que fundamenta todo o conhecimento objectivo – a fenomenologia, a ciência da consciência purificada. É esta teoria do conhecimento genuinamente científica que explicita a estrutura da consciência – o Eu e os seus respectivos actos mentais –, a doação do mundo (i.e., a percepção) e o tipo primordial de juízo (ou seja, o juízo de percepção, do qual todos os outros tipos de juízos são suas modalizações). Para Husserl, tal como para Mill, o juízo predicativo ou apofântico é a base da lógica tradicional. Portanto, a lógica apofântica, i.e., a teoria do juízo, é a questão fundamental da lógica formal, e só depois se pode explicitar a silogística, os cálculos proposicional e de predicados, etc. E a origem dos conceitos da lógica apofântica – sujeito, predicado, significação, predicação, etc. – é explicitada pela lógica transcendental, que revela essa sintaxe perceptiva, da qual advém a sintaxe tradicional. Por conseguinte, a *sintaxe tradicional* (*i.e., sintaxe formal ou combinatória*) *é uma idealização.* Assim sendo, o simbolismo lógico-matemático são signos que expressam *idealizações*. Parte dessas *idealizações* são *idealizações* doutras *idealizações*; há, portanto, graus de idealização. As *idealizações* de primeiro grau são fundamentais para a ciência, e pode-se dizer que são autênticas – *e.g.*, o número dois ou a figura geométrica designada por quadrado. Idealizações de grau superior são, geralmente, necessárias numa teoria científica. No entanto, as *idealizações* de grau superior podem, algumas vezes, ter um valor meramente operativo, ainda que muito importante, sendo, assim, idealizações inautênticas, pois já não remetem para nenhuma estrutura do ser – *e.g.*, «-1» ou, mais ainda (pois é uma idealização inautêntica de uma idealização inautêntica), «√-1». Se se olvidar esta importantíssima diferença epistémica, surgem teorias científicas que podem conter impossibilidades ou objectos contraditórios. Não quer isto dizer que não sejam essenciais conceitos

---

zwischen dem Syntaktischen überhaupt, das schon in der vorprädikativen Sphäre auftritt [...] und dem Syntaktischen der spezifischen Urteilssphäre.»).

[38] Cf. Husserl, *Formale und Transzendentale Logik*, particularmente, a «Conclusão» (*Husserliana*, XVII, pp. 142-4), e *Erfahrung und Urteil*, §1.

[39] Cf. Husserl, *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, I, §75 (*Husserliana* III/1, pp. 156-8).

inautênticos ou operativos em certas teorias científicas: desde que o sentido não seja perdido de vista, não há qualquer problema; todavia, há uma tendência a pô-los ao mesmo nível dos conceitos autênticos, e isso leva a resultados necessariamente nefastos.

Um sistema formal que contenha idealizações inautênticas pode funcionar, em termos pragmáticos, muito bem; no entanto, o seu sentido está pervertido, e, de um ponto de vista estritamente científico (e não apenas técnico), é falso. São teorias com valor operativo mas sem valor genuinamente científico: elas consistem em abordagens apenas formais – os seus objectos são ficções quase para-científicas, e não verdadeiras idealidades. Trata-se de idealizações operadas sobre sucessões de idealizações (podendo, teoricamente, essas sequências irem até ao infinito), as quais produzem conceitos pouco mais do que estéreis, apesar de não serem falsos. Um dos melhores exemplos disso é a *teoria dos conjuntos*, a qual pretende explicitar axiomaticamente (i.e., pela lógica simbólica) a essência da disciplina matemática, pondo como conceito-base dessa axiomática a noção de *conjunto*. A teoria dos conjuntos é uma teoria de elevadíssima idealização, que nada traz para o esclarecimento da origem gnosiológica dos conceitos e leis primitivos da matemática:

> Revendo a disputa Frege-Husserl, penso que podemos dizer que a essência da objecção de Husserl é a de que devemos procurar compreender a *significação* ou a intensão do conceito de número de algum outro modo, e que é filosoficamente importante que o façamos, mesmo se vários tipos de definições explícitas, redutivas podem ser dados. Penso que o trabalho subsequente nos fundamentos da matemática confirma isso. A mesma observação pode ser feita sobre outro conceito básico da matemática. Isto é de especial interesse nos tempos recentes, no caso da teoria dos conjuntos, já que a matemática pode ser "reduzida" à teoria dos conjuntos, mas ninguém entende o que a posse de uma definição explícita do conceito de conjunto significaria.[40]

Uma fundamentação axiomática da lógica ou da matemática é uma fundamentação técnica, não é uma fundamentação científica. No caso da matemática, a teoria dos conjuntos pode fundá-la axiomaticamente, mas isso não termina o processo de explicitação da matemática: reduzir todos os conceitos da matemática ao conceito de conjunto (ou seja, ao conceito de *extensão*) não traz nenhuma luz sobre o

[40] Richard Tieszen, *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge (CUP), 2005, p. 322. «Looking back on the Frege-Husserl dispute I think we can say that the upshot of Husserl's objection is that we must seek to understand the *meaning* or intension of the concept of number in some other way, and that it is philosophically important that we do so, even if various kinds of explicit, reductive definitions can be given. I think that subsequent work in the foundations of mathematics bears this out. The same point can be made about other basic concept of mathematics. This is of special interest in recent times in the case of set theory since mathematics can be "reduced" to set theory, but no one understands what having an explicit definition of the concept of set would mean.»

conceito de número, a natureza das leis fundamentais da aritmética, etc., ou seja, a teoria dos conjuntos não é uma epistemologia da matemática. Além disso, o seu conceito de "conjunto" não é o verdadeiro conceito: é uma extensão do conceito original e autêntico, que o perverte, pois adultera a sua natureza, i.e., a pluralidade – "conjunto vazio" e "conjunto singular" não são conjuntos.

Uma verdadeira fundamentação de uma disciplina é uma fundamentação transcendental, que mostre a génese cognitiva dos seus conceitos fundamentais, ou seja, as intuições que qualquer sujeito transcendental – seja um extraterrestre, um mamífero superior, uma inteligência artificial, um anjo, Deus, etc. –, necessariamente, tem para adquirir o conhecimento objectivo[41]. Por outro lado, mesmo no plano formal da questão (que é sempre um domínio derivado da originária esfera transcendental), a lógica formal tem que ter como célula não a extensão mas sim a *intensão*. Além de uma lógica intensionalista estar à partida salvaguardada dos conjuntos impossíveis originados pelas definições *impredicativas*[42] (*e.g.*, a classe[43] das classes que não pertencem a si próprias, a classe de todas as classes, etc.) e dos consequentes paradoxos (paradoxo de Russell, etc.), também liberta a lógica de implicações metafísicas idealistas (i.e., a reificação dos predicados em classes ou extensões) e permite explicitar o valor epistémico de juízos sobre futuros contingentes (i.e., a *intensão* é o conceito primitivo de uma lógica modal), coisa sobre a qual o extensionalismo (que implica um actualismo: qualquer classe existe, "está aí") não se consegue posicionar, pois o seu primado do valor-de-verdade (em detrimento da possibilidade ou impossibilidade de um conteúdo ideal) implica uma remissão para o presente ou para o passado, para se verificar se é o caso ou não.

---

[41] Apesar do intuicionismo de Brouwer ter algumas semelhanças com a filosofia de Husserl e, consequentemente, com o seu pensamento matemático, o sujeito transcendental de Husserl é, necessariamente, intersubjectividade, e não apenas intersubjectividade entre humanos, mas entre quaisquer consciências que existam, ao contrário do *sujeito criativo* de Brouwer, que é solipsista. O sujeito de Husserl não cria o conhecimento, *constitui-o*: a intuição categorial não é uma visão de pretensas realidades espirituais, mas também não é uma mera construção, pois o material para se intuir os objectos científicos é dado pela percepção, e, portanto, a intuição categorial é objectiva, ela remete para o mundo. A intuição categorial é tanto construção como captação.

[42] Ver nota 1.

[43] Uso aqui «classe» como sinónimo de «conjunto». Na teoria dos conjuntos coeva, diferencia-se entre *classe* (ou «classe própria» – i.e., classe propriamente dita) e *conjunto*, sendo uma *classe* como que uma propriedade, e não um conjunto. Trata-se apenas de um subterfúgio que ainda aumenta o número de contra-sensos: uma classe que é uma extensão que não é um conjunto, classe essa gerada por uma propriedade que não qualifica – uma *definição impredicativa*. Esta separação entre *classe* e *conjunto* é paradigmática da fragilidade do extensionalismo. Repare-se que o pensamento fregeano e a sequente filosofia analítica duplicam conceitos, transformando pares de sinónimos em clivagens: sentido vs. significação [*Bedeutung*], característica vs. propriedade, conjunto vs. classe. Não há que admirar: quando se nega que as idealidades são as idealizações dos atributos das coisas, tem que se duplicar entidades – já Platão assim o fez, com a sua divisão entre mundo sensível e mundo inteligível.

Dossier

Georg F. B. Riemann (1826-1866)

Nota de Apresentação

S. Varela Sousa
(CFCUL)
sfsousa@fc.ul.pt

Considerações muito breves sobre os *Espaços* e as *Hipóteses*

Talvez sejam raras as ocasiões em que a investigação matemática e a indagação filosófica tenham entrado numa intimidade tão seminal como na prova[1] que o matemático alemão Bernhard Riemann prestou perante a Faculdade de Filosofia de Göttingen em Junho de 1854, intitulada *Sobre as Hipóteses nas Quais a Geometria se Fundamenta*. Não se trata apenas de um problema matemático com implicações metafísicas delicadas: são muitos os problemas matemáticos que as implicam; trata-se sim, de um problema matemático cuja abordagem revela, da parte de Riemann, uma metodologia de orientação filosófica intensa, quase inédita, à qual acresce o especial momento em que surge, o meado de um século no qual a geometria sofre o seu mais violento abalo, para imediatamente frutificar numa reconstrução que ampliou as suas fronteiras para lá de qualquer horizonte que os anteriores séculos de pensamento pudessem ter mirado.

Esse problema pode talvez apresentar-se através da pergunta: como determinar matematicamente o Espaço? Riemann direcciona a sua investigação para a geometria e, como é natural, este problema de determinar o espaço diz respeito ao *espaço geométrico*. Pensou então o problema em dois momentos: no primeiro, procurando as propriedades *métricas*, e dentro destas, as *intrínsecas*, que definiriam esse espaço; no segundo momento, e porventura motivado pelas reflexões resultantes do primeiro, fez um movimento de grande beleza, interrogando-se sobre o que seria afinal este espaço geométrico, e que consequências teria a sua forma para o estudo da Natureza:

[1] Embora se trate de uma *dissertação* escrita para o efeito de prova académica, pela originalidade do tratamento que trouxe ao tema e pelo método inaugural que apresentou, referiremos frequentemente a *Über die Hypothesen…* como *lição*.

encontrando-se perante um problema espinhoso, compreendeu que além do problema da definição, era necessário encontrar instrumentos conceptuais que o pudessem auxiliar na tarefa de dominar um tal enigma, justamente, o da natureza do *Espaço* (aqui já não sendo tomado pelo espaço geométrico, mas pelo receptáculo mais geral onde é inscrito o espaço geométrico – primeiro, aquele que as «hipóteses» ou «sistemas de factos» de Euclides consagraram, e depois outros espaços que *outras* hipóteses poderiam talvez constituir)[2].

Enigma (ou «obscuridade», como Riemann preferiu chamar-lhe), que nem os matemáticos nem os filósofos tinham clareado: o leitor confirmará, logo no parágrafo que abre a dissertação, como Riemann começa por afirmar que sobre o Espaço os geómetras na verdade nada sabem. Sabem sem dúvida operar com «princípios fundamentais» que nele permitem construir, e postulam, sobre a forma de axiomas, as «determinações fundamentais» subjacentes a esses princípios. Porém, o exame que permitiria demonstrar a validade dessas construções, nunca foi suficientemente levado a cabo. Obscuridade agudizada, em boa parte, desde que, na sua *Estética Transcendental*, Immanuel Kant tinha prescrito ao Espaço uma natureza *apriorística*, sediada nas predisposições cognitivas intrínsecas ao *sujeito*, e portanto confinadas a um constrangimento: enquanto *intuição pura*, o Espaço encerrava-se na condição de uma idealidade constitutiva do próprio espírito humano, e da qual era, do ponto de vista humano, impossível sair. Esta concepção kantiana, ainda que determinando os limites da percepção subjectiva, acarretava porém uma dificuldade acrescida: Kant assumia que o espaço, como intuição pura, tinha o seu «protótipo» na geometria euclidiana (não será inteiramente fortuito que, no parágrafo já referido, Riemann questione a «necessidade» da «relação dos pressupostos» de construção geométrica ser «a priori»). Esta concepção não podia servir a Riemann; dito de maneira imperfeita: ao espaço subjectivo, de ordem transcendental, faltava contrapor o espaço objectivo, independente do sujeito e das suas condições perceptivas. Acontece que fora dos limites do conhecimento transcendental, Kant tinha dado passos temerosos (incluindo na doutrina do Espaço), detidos pela sua convicção acerca da impossibilidade de pensar a coisa-em-si.

Sem verdadeiramente se opor a Kant – até porque, em rigor, trataram problemas diferentes –, mas seguindo as hesitações de Johann Herbart, seu mestre em

[2] Nas muitas vezes em que fala de *espaço* na sua dissertação, Riemann refere-se sempre ao espaço físico. Este espaço físico aceita, ou melhor, pode ser descrito, por outros espaços, estes matemáticos. A oposição entre Espaço físico e espaços geométricos, nem sempre parece clara no texto de Riemann, mas com efeito é: se por um lado fala do *espaço* (físico), por outro, o matemático está interessado, dentro do quadro deste espaço, nos espaços geométricos (de ordem matemática, abstracta), para os quais cria uma nova aparelhagem conceptual: passam a ser designados por *grandezas* (ou *variedades*) *extensivas*, que podem possuir *n-dimensões*, cuja principal particularidade, a qual também as distingue entre si, é a de possuírem *superfícies* caracterizáveis pela *medida da sua curvatura*.

Filosofia, acerca da idealidade do Espaço, Riemann interessou-se justamente por essa dificuldade em apreender o Espaço na sua autonomia própria, como ideia, como conceito e como realidade, desapegado de qualquer ponto de vista ou concepção sistemática. E, ao subtrair a noção de Espaço aos limites constitutivos do espírito humano, Riemann restabelecia as condições para dar tratamento a esta noção, com a particular abstracção que convinha à ciência matemática.

Em causa estará, por um lado, a suposta *necessidade* da geometria euclidiana, por outro, a sua *legitimidade*, digamos, exclusiva, para descrever o espaço físico.

Quando se diz que dos três grandes reformadores da geometria no séc. XIX, a saber, Lobatchevski, Bolyai e Riemann, este último foi o mais profundo dos pensadores, eis o que se quer implicar: enquanto Lobatchevski e Bolyai reformaram a geometria porque "brincaram" com as regras da geometria euclidiana e concluíram que a brecha nessas regras, se desenvolvida, produzia outros sistemas, novos e paralelos – porém sempre dentro da esquadria de sistemas geométricos, quer do euclidiano, quer do novo – Riemann, por sua vez, interrogou a universalidade, o elemento comum, a qualquer sistema geométrico através de um desvio pelas considerações sobre a natureza da geometria tomada na máxima generalidade possível; ou, melhor ainda, pela definição das determinações de diferentes espaços geométricos que o Espaço poderia, matematicamente, admitir. Riemann parte para a lição tendo já abandonado o pressuposto da exclusividade euclidiana – ele próprio o dirá: «impõe-se a tarefa de descobrir os mais simples factos a partir dos quais as relações métricas do espaço se deixam determinar […] pois talvez haja vários sistemas de factos, os quais são suficientes para determinar as relações métricas do espaço» (1854, *Plano da Investigação*). Claro que imediatamente acrescenta que o sistema de factos mais importante será sem dúvida o de Euclides (Riemann não podia deitar fora nem a história nem mesmo a praxis da geometria, que de resto é o referencial fundamental para compreender a sua investigação geométrica; além disso, em lado nenhum ele põe em causa uma maior «comodidade» – tomando aqui de empréstimo o termo de Poincaré – da geometria euclidiana). Porém, bem podemos procurar com afinco, na lição de 1854, as questões que Riemann lança à geometria euclidiana: não são nenhumas. O matemático não faz sentar Euclides no banco dos réus. Todas as suas questões são dirigidas aos problemas da métrica (das relações métricas) num espaço geométrico, interrogando que relações determinantes delas se podem extrair – em particular, do ponto de vista da *análise* (recolocando o problema de determinar a distância entre dois pontos infinitamente próximos) –, e contemplando as consequências que delas resultam, nomeadamente, os vários sistemas geométricos, ou, nas palavras de Riemann, os vários sistemas de «factos».

E afinal, de que se fala quando se fala de Espaço? Que Espaço é este que Riemann aprofunda? Sem dúvida que é um espaço matemático, diferente por exemplo do espaço da experiência. Mas esse espaço matemático não é o que resulta da manipulação dos elementos da geometria euclidiana? Para Riemann já não; ou melhor, não só. Se se atentar detidamente no espaço matemático, autonomamente, procurando sair para fora da esquadria euclidiana, verifica-se que o caso descrito por essa geometria talvez configure apenas um determinado comportamento dos elementos, baseado em duas pressuposições, ou «factos», ou «hipóteses» fundamentais: por um lado, que a superfície deste espaço não é *curva*, ou que pelo menos a sua curvatura é igual a zero; por outro lado, que ele se restringe a um regime *tridimensional*. Porém, se o Espaço for pensado abstractamente, nenhum facto parece tornar *necessário* que a sua curvatura seja zero, nem que possua apenas três dimensões.

Estas objecções, que agora – e hoje – se levantam tão expeditamente, constituíram para Riemann, *e com ele*, uma pequena revolução. Por um lado, porque são duas simples questões que, uma vez levantadas, imediatamente problematizam o estatuto da geometria euclidiana[3]; por outro lado porque, para serem férteis, é preciso operacionalizá-las, portanto, criar instrumentos de análise que permitam converter duas questões interessantes em ferramentas efectivas de investigação. Riemann conseguiu, na sua lição, dar conta dos dois aspectos: quanto ao estatuto da geometria euclidiana, surpreendemo-la, no final da lição, reposicionada ao nível de uma hipótese matemática essencialmente fundada nos hábitos da experiência humana, a qual, porém, talvez colapse quando se ultrapassam os limites dessa experiência, passando para o território do desmedidamente grande ou do desmedidamente pequeno – magnífico problema que Riemann apenas sugere; quanto aos instrumentos matemáticos de análise, Riemann vai inventá-los – é disso que se ocupa a segunda secção da lição – sendo certo que, dada a complexidade da tarefa, não é tratada em toda a sua extensão pelo matemático, apenas o suficiente para que as *hipóteses* de Riemann pudessem esboçar o programa *das geometrias*. É certo que o leitor encontrará Riemann sempre empenhado em edificar as hipóteses que lhe permitem construir uma geometria específica, a geometria da esfera a três dimensões. Mas, ao fazê-lo, Riemann está simultaneamente a dar a chave para edificar outras geometrias.

[3] O *estatuto*, e não tanto a *consistência*. Ainda que seja efectivamente a *consistência* do sistema geométrico euclidiano que Riemann põe em causa logo no precioso parágrafo introdutório da Lição, pois quando menciona «os princípios fundamentais para construir no espaço» (Riemann, 1854 I.1), só pode estar a referir-se aos teoremas da geometria euclidiana. Ferreirós, num pequenino texto que só citarei aqui, afirma mesmo que «esta questão da consistência é, na história da matemática, posta por escrito pela primeira vez [neste parágrafo]» (Ferreirós, José, *The Magic Triangle: Mathematics, Physics and Philosophy in Riemann's Geometrical Work*, nota 8, p. 4: (http://semioweb.msh-paris.fr/f2ds/docs/geo_2004/Jose_Ferreiro_2.pdf).

Aí jaz boa parte da profundidade da sua investigação, justamente, e como dissemos, por causa do método riemanniano.

Dando conta da nossa manifesta impotência para tratar a segunda secção da lição (de cariz matemático extremamente complexo e sobre a qual diversas gerações de matemáticos se debruçaram, a fim de inteiramente determinar o plano aludido por Riemann), enunciaremos apenas, numa espécie de elenco, o programa conceptual deste matemático. Reflectindo sobre o problema da construção matemática de um espaço, a sua estratégia heurística conduziu-o, por um lado, ao desenvolvimento da noção de *curvatura da superfície* que Gauss, seu mestre e orientador, tinha anos antes trabalhado, ainda que no quadro da geometria euclidiana; por outro lado, ao desenvolvimento de um dos conceitos mais poderosos da matemática, e que na prática viria mesmo a estruturar o desenvolvimento da topologia: o de *variedade*. Toda a dificuldade estava aqui: eram dores de parto, pois havia conceitos novos a forjar, cuja operatividade e consequências estavam ainda para descobrir. Quando, na primeira secção do texto, Riemann se desculpa pelas suas eventuais trapalhices enquanto matemático que, posto na posição de filósofo, se vê constrangido a construir novas ferramentas conceptuais, a sua dificuldade, mais do que filosófica (*definir* e *determinar*) é a de operacionalizar, de entregar à matemática as candeias que permitam iluminar o Espaço por onde ela procedia às escuras. Nomeadamente, pôr em mútuo acordo os conceitos de *medida de curvatura* e o de *grandezas de múltipla extensão*, da qual a *variedade* é a noção sumamente geral (nomeadamente, o problema de encontrar a expressão relacional geral que exprima a medida de curvatura em variedades extensivas a *n*-dimensões). A noção matemática de *variedade* vai permitir a Riemann conceber espaços geométricos com quantas dimensões se desejar, sendo aqui a variedade apresentada como o trajecto que um *ponto* inscrito nesse plano geométrico pode descrever, em função da curvatura da superfície dessa variedade e das transições que esse ponto pode efectuar entre diferentes extensões da variedade (por *extensão*, parece-nos que Riemann significa literalmente, *dimensão*), preservando as suas *determinações específicas*: o sistema das transições possíveis determina o número de dimensões da variedade. O projecto de Riemann é o de reduzir a determinação da posição do ponto a um número específico (finito) de determinações de grandeza (determinações métricas), as quais definem então, não só a posição do ponto, mas a própria variedade. Trata-se, portanto, como dirá ao início da secção II, de «investigar as relações métricas de que uma tal variedade é passível, e das condições suficientes para determiná-las» (adaptámos ligeiramente a citação). Isto, segundo Riemann, definirá qualquer espaço geométrico.

Os momentos fundamentais do raciocínio são os seguintes: primeiro, que para determinações métricas, o *comprimento* de uma linha deve ser independente da *posição* desta, e que portanto, uma linha é mensurável a partir de qualquer outra linha – o problema passa, então, por estabelecer a expressão matemática que dê conta do comprimento das linhas; em seguida, desenvolvendo a função que lhe permite obter essa determinação, Riemann descobre que o espaço geométrico euclidiano traduz um caso específico do comportamento dessa função, a saber, que a posição dos pontos é dada dentro de um sistema de coordenadas rectilíneas – este, diz, é o «caso mais simples», o do «Plano» e do «Espaço», ao qual chamará de *variedades «planas»* (II.1). Porém, eis que surge a grande dificuldade técnica do projecto geométrico de Riemann: «para que se conheçam todas as diferenças fundamentais com a forma representável pressuposta na variedade, é necessário *eliminar as dificuldades que emanam do modo como a representamos*» (*id.*). Riemann depara-se agora com um problema de expressão de um raciocínio novo e para o qual não há precedente na linguagem técnica da ciência matemática. A dificuldade está, em boa parte, em exprimir adequada e correctamente uma ideia geométrica, ou melhor, uma intuição geométrica, naquele sentido de um vislumbre iluminador. Assim, continuando, e porque Riemann está interessado em ir além do caso das variedades planas, interessa-lhe saber definir *a medida da curvatura de uma variedade*, operação que realiza, partindo dos estudos de Gauss, mas elevando-os à generalização da relação entre a determinação da direcção de uma linha à superfície e o seu desvio em relação à planura (Riemann desenvolve esta relação, que aqui apenas indicamos). É então que descobre que, no caso que lhe interessa, o caso da variedade a *n*-dimensões, se em cada ponto dessa linha for dada a medida da curvatura da superfície, então todas as relações métricas da variedade, em todas as suas dimensões, daí podem ser deduzidas, «de modo inteiramente independente da escolha da grandeza variável» (II.2). Ou seja, e para o caso da *geometria riemanniana* (esta geometria da qual Riemann está a dar um espécime, mas que, por ser concebida sempre na máxima generalidade admissível, é, no espírito da própria lição, um caso a partir do qual outros casos podem ser deduzidos), a superfície de uma variedade fica inteiramente determinada quando se estendem todas as linhas mais curtas possíveis nessa superfície (os seus geodésicos), numa direcção dada, conhecendo a medida da curvatura em cada ponto dessas linhas: «é através da curvatura que as relações métricas da variedade são completamente determinadas» (II.4). Riemann compreende que o caso da superfície com curvatura positiva constante é o da esfera, e usa, em tom de prova, o facto de esta curvatura intrínseca permitir converter, ou não, diferentes superfícies num plano: o cilindro, desdobrando-se, pode ser convertido numa superfície plana; já a esfera só o permite se forem forçadas distensões.

Neste esforço de determinação, embora esteja claramente a construir a geometria esférica a três-dimensões, por não ter prescindido da máxima generalidade, portanto, porque as suas concepções admitem outras *hipóteses* que não a desse caso específico, o matemático vai ao encontro de um *Espaço* que, agora pensado fora dos limites da esquadria euclidiana, é desdobrável num vasto sistema de espaços geométricos possíveis, aos quais a intuição está talvez vedada, mas onde a matemática pode penetrar, através da razão e da imaginação, liberta dos seus dois maiores antagonismos, inconsistência e contradição. Uma penetração matemática que deixa Riemann extasiado ao ponto de entrever nela as mais importantes consequências para a Física (as quais, como sabemos, a história viria a favorecer, através do desenvolvimento da Teoria da Relatividade), e para a compreensão da própria natureza do real. Dada, porém, a dificuldade do tema, e mesmo a dificuldade em pensar o quadro geral desse Espaço para o qual abriu uma porta muito larga, Riemann preferiu remeter-se à humildade própria de quem abre caminhos, antecipando apenas a hipótese de que um dia possam fazer parte de estradas mais compridas.

A terceira secção é, se nos for permitido, de uma prodigiosa beleza, que rima com a sua incompletude: distinguindo entre *ilimitação* e *infinitude*, sem dúvida tomando partido das ideias sobre a superfície esférica (ilimitada, mas finita) e sobre a superfície plana (ilimitada e infinita), Riemann preocupa-se seriamente com a natureza real da geometria, quando aplicada ao espaço físico, pois do seu conhecimento depende também qualquer penetração no desmedidamente grande e no desmedidamente pequeno – fora da escala intuitiva da experiência humana. Só conhecendo, em profundidade, as relações métricas que a geometria admite é possível conhecer a estrutura mais íntima dos fenómenos infinitamente pequenos, dos quais depende o fundamental conhecimento da realidade.

Caso notável, onde o génio matemático se vê aliado a um profundo detalhe e detenção filosóficos, e a um raciocínio que, ainda que elíptico, vê os seus passos fundados numa atenção escrupulosa à matéria em estudo, à delicada construção e depuração de cada conceito. Uma reactualização da relação profunda entre a estrutura do *kosmos*, universo físico harmónico, e a estrutura do *logos*, da razão humana, que evoca, da maneira mais luminosa e feliz, os esforços compreensivos das cosmogonias e indagações físicas dos primeiros argonautas do pensamento, os filósofos pré-socráticos.

Não cabe aqui adjectivar e enaltecer uma obra que, apesar da sua curta extensão, viu surgir em seu redor uma aura incomum. Cremos haver porém neste texto um interesse inquestionável para os estudiosos do Espaço e das geometrias, quer matemáticos, quer filósofos. Riemann não colocou a tónica numa aproximação filosófica ao problema do Espaço, problema mais a mais especificamente metafísico. Mas as suas considerações e aproximações matemáticas tiveram raiz num pensamento amplo, que não desconsiderou esse Espaço de difícil inteligibilidade, e que o tornaram, mesmo como ideia, mais modelável. O sistema da pan-geometria pode não ter esclarecido os problemas metafísicos do Espaço, mas é inegável que o *concretizou* como ideia. E a ideia de Espaço cresceu, em extensão e profundidade, com Riemann.

Sobre este Dossier

O dossier que apresentamos nasce da convicção de que com ele se colmata a inexistência de uma tradução portuguesa, e parece-nos legitimado por amenizar talvez os obstáculos que naturalmente se levantam na leitura de um texto numa língua estrangeira, intensificados no presente caso pelo carácter particularmente difícil, por vezes mesmo obscuro, do escrito.

Justamente a fim de completar uma leitura para a qual, cremos, todo o auxílio é bem-vindo, pareceu desde logo útil reunir um conjunto de apêndices de leitura introdutória e complementar. Tivemos a felicidade de ver as nossas solicitações bem acolhidas junto de dois dos maiores especialistas contemporâneos no pensamento de Riemann, José Ferreirós e Erhard Scholz. A fim de homogeneizar o dossier, procurámos que todos os textos chegassem ao leitor português também na sua língua.

José Ferreirós editou as obras fundamentais de Riemann em castelhano[4] (na verdade, uma edição bilingue) e ofereceu aí uma detalhada introdução crítica, cobrindo intensivamente os aspectos da biografia e percurso intelectual do matemático de que nos ocupamos. Dessa introdução, reproduzimos aqui dois capítulos que considerámos particularmente importantes, o capítulo 2, *Riemann Filósofo* (do qual foram suprimidas as secções 2.3 *Psicología, alma y materia*, e 2.4 *Finalidad*) e o capítulo 5, *Riemann Matemático: Topología y Geometría* (reproduzido na íntegra). O leitor encontrará aqui uma exposição muito detida da formação filosófica de Riemann, tanto no que respeita à sua dívida para com a filosofia de Herbart e às consequências que o pensamento desse autor produziu na aproximação de Riemann ao problema da geometria, bem como a sua aproximação a outros pensadores – Kant e Leibniz, especialmente – e às principais correntes filosóficas e científicas do seu período. Por outro lado, reconstrói a epistemologia que Riemann deixou delineada em muitos escritos do espólio, fundamental para compreender o procedimento filosófico nas suas investigações matemáticas. No capítulo *Riemann Matemático*, o leitor encontrará uma introdução e análise dos principais aspectos matemáticos da lição de 1854.

[4] Riemann, Bernhard, *Riemanniana Selecta*, edição bilingue e introdução de José Ferreirós, CSIC, Madrid, 2001.

Erhard Scholz, historiador das ciências matemáticas e físicas, debruçou-se sobre os trabalhos de Riemann e é um dos principais responsáveis pela edição e análise crítica do espólio deixado por este matemático. No texto que nos cedeu[5], Scholz dá uma perspectiva da influência de Herbart sobre Riemann no que respeita à concepção do seu novo conceito de *variedade* e enuncia as principais contribuições do escrito de 1854 para a geometria diferencial. Analisa também o lugar da contribuição de Riemann no plano geral da revolução geométrica do séc. XIX, em particular na sua abertura para os sistemas geométricos não-euclidianos, na clara independência face aos escritos de Lobatchevski e Bolyai e às tentativas de demonstração do 5º postulado de Euclides. Finalmente, debruça-se sobre o papel do conceito de variedade no tratamento do espaço físico, e conclui com a orientação filosófica de Riemann no tratamento da matemática, retornando às principais dívidas deste para com Herbart.

Infelizmente não fomos capazes de obter uma contribuição que pudesse servir o leitor especificamente interessado no aspecto técnico da investigação geométrica de Riemann. Uma falha que temos a admitir e a lamentar. Resta porém, nesse domínio, tomar a liberdade de remeter para aquele que é um dos estudos mais completos, detalhados e acessíveis sobre geometria diferencial, a de Riemann em particular, a saber, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, de Michael Spivak, cap. IV, que tem a vantagem de oferecer uma tradução inglesa do texto, a qual não deve deixar de ser consultada.

Agradecimentos

Uma palavra final deve dar conta das dívidas de gratidão a que este dossier, e o trabalho que envolveu, não são alheios.

Aos Profs. Erhard Scholz e José Ferreirós devo agradecer a pronta disponibilidade para tomar parte no projecto, a forma prestável como logo cederam as suas contribuições, e o interesse com que acompanharam e auxiliaram o processo. Também ao CSIC, em particular a Isabel López Barrio, cabe um agradecimento.

Da parte dos Profs. Augusto Franco de Oliveira e Paulo Almeida pude contar com estímulos para este empreendimento. Espero que o resultado possa ir ao encontro das suas expectativas.

---

[5] *Riemann's vision of a new approach to geometry*, in "1830-1930: A Century of Geometry, Lecture notes in Physics", Springer, 1992, vol. 402, pp. 22-34.

Às minhas amigas Isabel Winter e Andrea Yehudit Richter devo o apoio na ultrapassagem de muitas dificuldades da tradução.

Aos meus colegas do CFCUL, e amigos, María da Paz Amerigo e Nuno Jerónimo tenho a deixar uma palavra de sentida gratidão pelo apoio e interesse com que acompanharam o projecto. Testemunho ainda a forma incansável como María da Paz pôs (e tem posto) ao meu alcance várias fontes bibliográficas e me colocou problemas que motivaram a reflexão e o aprofundamento nestas matérias. Também a Cristina Barez Gomez agradeço a simpática disponibilidade com que facilitou contactos.

Ao Centro de Filosofia das Ciências e aos directores da revista *Kairos* devo gratificar o pronto e entusiástico acolhimento do projecto deste dossier, que revestiu para mim uma oportunidade única no trabalho sobre Riemann; tenho também que dar conta da paciência e benevolência com que aguardaram as suas finalizações. Muito em particular, uma palavra de sentida gratidão, e mesmo de admiração, à Prof.ª Olga Pombo.

Sugestões Bibliográficas

Esta bibliografia não é nem exaustiva nem intensiva. Com ela pretende-se apenas sugerir ao leitor um conjunto de obras onde se vê discutido e analisado (de modo mais ou menos especializado) o conteúdo da lição de Bernhard Riemann e as suas implicações na Filosofia, na Matemática e na Física, complementando as indicações bibliográficas dadas já por Erhard Scholz e José Ferreirós no final dos seus estudos.

Alexandrov, Kolmogorov, Lavrent'ev, *Mathematics: Its Contents, Methods and Meaning*, vol. III, M.I.T. Press, Cambridge, 1963, trad. K. Hirsch.

Anglin, W. S., *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, Springer-Verlag, New York, 1994;

Behnke, Bachmann, Fladt, Kunle, *Fundamentals of Mathematics, vol. II: Geometry*, M.I.T. Press, Cambridge, 1986, trad. S. H. Gould.

Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, New York, 1991.

Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, 2ª Edição, The Macmillan Company, Londres, 1919.

Deleuze, Gilles, Guattari, Félix, *Capitalisme et Schizophrénie II: Mille Plateaux*, Les Éditions de Minuit, Paris, 1980. (O cap. 14, "1440 – le lisse et le strié" apresenta uma aplicação extremamente singular, no campo filosófico, das principais concepções geométricas de Riemann no desenvolvimento das ideias sobre espaço *liso* e espaço *estriado*.)

Dunnington, G. Waldo, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, The Mathematical Association of America, Nova Iorque, 1955.

Eves, Howard, *Great Moments in Mathematics: After 1650*, The Mathematical Association of America, USA, 1983.

Ewald, William, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. II, Oxford University Press, New York, 1996.

Grünbaum, Adolf, *Philosophical Problems of Space and Time*, Alfred A. Knopf, Nova Iorque, 1963.

Harper, Charlie, *Introduction to Mathematical Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976. [em particular §§9.5 e 9.6]

Hilbert, Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Company, New York, 1990, trad. P. Nemenyi.

Kasner, Newman, *Mathematics and the Imagination*, G. Bell and Sons, London, 1950.

Klein, Felix, *Elementary Mathematics (from an Advanced Standpoint): Geometry*, Dover Publications, New York, 2004, trad. E. R. Hedrick e C. A. Noble.

Kline, Morris, *Mathematics and the search for Knowledge*, Oxford University Press, New York, 1985.

Menzel, Donald H. (ed.), *Fundamental Formulas of Physics, vol. I*, Dover Publications, Nova Iorque, 1960. [em particular, §7]

Nerlich, Graham, *The Shape of Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Riemann, Bernhard, *Collected Papers* (ed. e trad. de R. Baker, C. Christenson and H. Orde), Kendrick Press, Londres, 2004. [inclui tradução inglesa do ensaio biográfico de Richard Dedekind sobre Riemann, *Bernhard Riemanns Lebenslauf*]

Riemann, Bernhard, *Riemanniana Selecta*, (ed. bilingue e introdução de José Ferreirós), Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2001.

Russell, Bertrand, *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1897.

Scholz, Erhard, *Bernhard Riemanns Auseinandersetzung mit der Herbartschen Philosophie*, in A. Hoeschen; L. Schneider (eds.): "Herbarts Kultursystem; Perspektiven der Transdisziplinarit ät im 19. Jahrhundert", Würzburg, Königshausen und Neumann, 2001, 163–183.

Scholz, Erhard, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser Basel-Boston-Stuttgart, 1980.

Scholz, Erhard, *Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie*, Archive for the History of Exact Sciences, 27, 1982, 213–282.

Scholz, Erhard, *The concept of manifold, 1850 – 1950*, in I.M. James (ed.), "History of Topology", Amsterdão, Elsevier, 1999, 25–64.

Spivak, Michael, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Houston, 1999.

Torretti, Roberto, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Kluwer, Dordrecht, 1984.

Torretti, Roberto, *Relativity and Geometry*, Pergamon Press, Oxford, 1983.

Introdução ao *Habilitationsvortrag* de Bernhard Riemann[α]

José Ferreirós
(Universidade de Sevilha)
josef@us.es

I. Riemann Filósofo

> *Aquela filosofia que nos ocupa não se encontra, em absoluto,* fora *dos restantes saberes, mas forma-se* neles *e* com *eles, como uma sua parte inseparável; tem com eles uma relação totalmente* imanente.[1]

A filosofia não é (nem deveria ser) alheia a considerações e dificuldades conceptuais que naturalmente surgem noutras esferas, pelo que pareceria arbitrário propor uma linha divisória fracturante entre o filosófico e o científico, ou o matemático. Sem tal pretender, podemos não obstante tratar de forma conexa vários problemas nos quais a reflexão filosófica desempenha um papel importante.

O de Riemann parece ser um desses casos, porventura frequentes, nos quais as ideias mais originais e particulares de um pensador surgem cedo. Aos 25 anos (cerca de 1852), já encontramos nele o essencial da sua nova orientação em análise, incluindo o início dos seus estudos cruciais sobre funções abelianas, mas também as directrizes que guiariam os seus esforços na teoria física, e uma evidente concentração em temas filosóficos. Após regressar a Göttingen em 1849, dedicou pelo menos três semestres a acompanhar cursos, não só sobre temas científicos, como os de Weber, mas também sobre filosofia. Mesmo após o seu doutoramento, Riemann constantemente dedicou uma parte muito considerável do seu tempo a leituras e

[α] As secções reproduzidas nesta introdução foram tomadas da vasta e notável introdução crítica que precede a edição espanhola da *Riemanniana Selecta* (secções 2 e 5 da Introdução; Bernhard Riemann, *Riemanniana Selecta*, C. S. I. C., Madrid, 2001, edição e estudo introdutório de José Ferreirós) as quais nos foram gentilmente cedidas pelo Prof. Dr. José Ferreirós para a presente tradução. Todas as omissões, adaptações e acrescentos tiveram aprovação do autor.

[1] Herbart, *Über philosophisches Studium* [1807], in *Sämtliche Werke* (Aalen, Scientia, 1964), vol.1, 230. Texto transcrito pelo próprio Riemann.

reflexões filosóficas. Aos poucos, encontraria um autor de referência, cujas obras se converteram em autênticas leituras de cabeceira: tratava-se do anterior catedrático de Göttingen, J. F. Herbart, um filósofo muito interessante, ainda que pouco estimado pelos profissionais da história da filosofia.

Em 1853 encontramos Riemann consultando obras de Fries e de Herbart, que em comum têm o serem filósofos não-idealistas, próximos à ciência do momento; evidentemente, a obra do kantiano Fries interessou-o menos que a de Herbart, cujos escritos se habituou a consultar todos os anos[2]. Todas as contribuições de Riemann revelam, com maior ou menor claridade, a imbricação de três fontes de conhecimento: matemática pura, física e filosofia. Para o demonstrar serve o seguinte texto, que Riemann deve ter escrito por volta de 1852/53:

> Os trabalhos que neste momento preferentemente me ocupam são:
>
> 1. De modo similiar ao que já sucedeu, com tanto êxito, com as funções algébricas, as funções exponenciais ou circulares, as funções elípticas e abelianas, introduzir o imaginário na teoria de outras funções transcendentes. Para isso estabeleci os pré-requisitos gerais mais necessários na minha dissertação inaugural [Cf., a dita dissertação, artigo 20, N.A.][3].
>
> 2. Em ligação com isso surgem novos métodos para a integração de equações diferenciais parciais, que já apliquei com êxito a diversos temas de física[4].
>
> 3. A minha principal ocupação diz respeito a uma nova concepção das conhecidas leis naturais – expressão das mesmas mediante outros conceitos básicos –, com o que se torna possível empregar os dados experimentais sobre a interacção entre calor, luz, magnetismo e electricidade, para investigar a sua inter-relação. A isso conduziu-me fundamentalmente o estudo das obras de Newton, de Euler e – por outro lado – de Herbart. No que toca a este último, as investigações mais antigas de Herbart, cujos resultados estão expressos na sua tese de doutoramente (de 22 e 23 de Outubro de 1802) conseguiram, quase na sua totalidade, a minha adesão, mas tive de afastar-me do caminho posterior da sua especulação num ponto essencial, o que acarreta diferenças com respeito à sua filosofia natural e àquelas proposições da psicologia relativas à sua ligação com a filosofia natural.

---

[2] Dados tomados do *Ausleihregister* [registo de requisições] da biblioteca universitária de Göttingen. A partir de 1853 requisita as obras de Herbart todos os anos, juntamente com as de outros autores herbartianos, entre os quais pode destacar-se Moritz Wilhelm Drobisch, matemático de Leipzig e autor de obras de lógica e psicologia

[3] A contribuição de Riemann para a teoria das funções de uma variável complexa, a que se refere este ponto 1, constitui uma obra de primeira grandeza, e foi a base da grande fama que alcançou em vida.

[4] O seu trabalho sobre equações diferenciais em derivadas parciais deu lugar a métodos originais e também a livros que várias gerações de físicos manusearam. O que é notável é que, perante tudo isso, o próprio Riemann nos diga que a sua "principal ocupação" era uma nova concepção dos fenómenos físicos, uma teoria unificada das forças fundamentais, inspirada não só nas obras de grandes físicos matemáticos, mas também na de Herbart.

Outro fragmento manuscrito de Riemann, resgatado pelos editores das suas obras completas, é explícito a este respeito:

> O autor é herbartiano em epistemologia e psicologia (Metodologia e Eidologia), ainda que em geral não possa adoptar a filosofia natural de Herbart nem as disciplinas metafísicas a ela ligadas (Ontologia e Sinecologia).

Como salientou o historiador da matemática Erhard Scholz, a parte da filosofia de Herbart a que Riemann disse aderir constitui propriamente uma teoria do conhecimento[5]. De facto, os seus fragmentos filosóficos incluem um ensaio sobre psicologia e outro sobre epistemologia que replicam claramente a exposições herbartianas. Dedicaremos, pois, espaço, a uma discussão das ideais principais de Herbart, na medida em que ajudam a iluminar as posições filosóficas, científicas ou matemáticas de Riemann.

Riemann e a filosofia de Herbart

O que primeiro convém dizer é que, por volta de 1850, vivia-se na Alemanha o declínio da tradição idealista, perante uma crescente difusão do positivismo e, sobretudo, a época dourada do mecanicismo. Mas quando se fala de idealismo, acontece o mesmo que com tantos outros conceitos filosóficos: aparece-nos sob uma forma bastante ambígua, dada a diversidade de posições que foram qualificadas com esse termo. Normalmente identificamos o "idealismo alemão" com nomes como os de Hegel, Fichte e Schelling, com o postulado da unidade do real e do racional no Espírito absoluto, e também com o postulado de um desdobrar dialéctico dos fenómenos. Ideias que conheceram muita notoriedade nos países de língua alemã no primeiro terço do séc. XIX, com impacto considerável mesmo entre os cientistas[6], mas que logo foram caindo em desgraça. Pois bem, "idealismo crítico" é o nome que tradicionalmente se aplica às doutrinas de Kant, doutrinas que convém distinguir com clareza das anteriores, entre outras razões porque (estas sim) gozaram frequentemente do crédito dos cientistas.

Johann Friedrich Herbart foi aluno do filósofo idealista Fichte, porém, já pelo final dos seus estudos, tinha desenvolvido uma crítica ao seu mestre. Em resposta à tendência idealista da filosofia alemã do momento, sempre fez questão de definir-se como *realista*. A sua renúncia a Fichte supôs um regresso a Kant, que será para ele

---

[5] E. Scholz, 'Herbart's Influence on B. Riemann', *Historia Mathematica* 9 (1982), 413–40.

[6] Um dos casos mais famosos é o de Oersted, que descobriu o efeito electromagnético produzido por uma corrente eléctrica sobre uma agulha magnetizada (1821).

um estímulo constante, ainda que de modo essencialmente crítico. Herbart foi quem ocupou, em 1809, a cátedra de Königsberg que Kant havia deixado vazia por ocasião da sua morte; em 1833 mudou-se para Göttingen, onde leccionou até à sua morte em 1841. Pois bem, este autor negou radicalmente a existência de qualquer fonte de conhecimento *a priori* e, portanto, a concepção kantiana das categorias do entendimento e das formas da intuição. A propósito das categorias, dizia:

> a quantidade de erros cometidos acerca das substâncias e das forças demonstra facticamente que os correspondentes conceitos não estão fixos e determinados no espírito humano, que não são, em absoluto, categorias ou conceitos inatos, mas sim produtos mutáveis de uma reflexão estimulada pela experiência e alterada por todo o tipo de opiniões.[7]

Sobre as famosas formas do espaço e do tempo, escreveu palavras tão duras como as seguintes:

> acrescentar um par de recipientes vazios infinitos nos quais os sentidos devem verter as suas sensações, sem qualquer justificação sobre a configuração e ordenação, foi uma hipótese completamente superficial, carecida de conteúdo e inapropriada.[8]

Em linha com o seu realismo e anti-apriorismo, Herbart tentou encontrar uma nova e interessante teoria do conhecimento: talvez, pela primeira vez num filósofo, aparece uma orientação coerente com o enfoque experimental e hipotético-dedutivo das ciências naturais, em consonância com a metodologia que começava a consolidar-se na consciência dos cientistas.

De facto, as ideias epistemológicas de Herbart desenvolveram-se sob a influência de um bom conhecimento da ciência do momento, a qual o marcou profundamente. No início da sua carreira, período em que exprime pontos de vista mais convincentes para Riemann, efectuou um estudo detalhado do cálculo infinitesimal e da mecânica. Na sua obra mais importante e original, da qual tomámos as anteriores citações, *Die Psychologie als Wissenschaft, neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik* [1825, 1826],[9] Herbart elaborou uma psicologia matemática segundo o modelo da física newtoniana: uma "mecânica do espírito", dividida em 'estática' e 'dinâmica'. Considera-se o dito trabalho como um precedente imediato e influente da psicologia científica, e os temas que sugere parecem, por demais, kantianos. Convém dizer que Herbart é também especialmente

[7] Herbart, *Psychologie als Wissenschaft*, vol. 2 (1826), 198.
[8] Herbart, *Psychologie als Wissenschaft*, vol. 1 (1825), 428.
[9] *A psicologia como ciência, fundada na experiência, na metafísica e na matemática*, in Herbart, *Sämtliche Werke* (Aalen, Scientia, 1964), vols. 5 e 6.

recordado na história da educação, sendo por muitos considerado como o pai da pedagogia.

Por outro lado, as propostas filosóficas de Herbart parecem dever muitas sugestões, quanto ao seu conteúdo, a Leibniz, o que me parece importante, já que desta maneira se converteu numa ponte entre as especulações leibnizianas e as de Riemann. Poderia dizer-se que, se Kant é uma referência constante, porém, frequentemente um "pólo negativo", Leibniz oferece-lhe sugestões pontuais, mas converte-se num "pólo positivo". A influência leibniziana deixa-se ver, antes de mais, na ontologia: Herbart defendeu uma versão da monadologia, ainda que as suas mónadas "tenham janelas", isto é, se inter-relacionem[10]. Mas a presença de Leibniz deixa-se sentir também na concepção herbartiana do espaço, nas suas importantes teorias psicológicas, etc. Também Riemann frequentemente consultou as obras de Leibniz e a sua correspondência, que começavam nesta época a ter boas edições, e entre os seus manuscritos encontram-se várias páginas com excertos de Leibniz. Conforme veremos, não é difícil encontrar importantes paralelismos entre os dois autores. Para Herbart todo o conhecimento se origina na *experiência*, e não há nenhuma fonte de conhecimento *a priori*; mas a sua posição não é empirista. A experiência não oferece só dados sensoriais brutos, mas também uma multiplicidade de *relações* entre os elementos sensoriais, relações que são tão objectivas e dadas como as simples sensações. Assim, pode dizer-se que na experiência tanto se nos oferece uma matéria como um conjunto de formas, e estas nada têm de subjectivo; e aqui está um dos profundos motivos da crítica citada à teoria kantiana das formas espacial e temporal.

Todavia, mais distante do empirismo está a ideia de que possuímos uma capacidade específica de *reflexão*, que é fundamental e que se orienta para propor conceitos da realidade adequados. Onde Herbart diz "reflexão" [Nachdenken] poderia dizer-se também "meditação", ou inclusivamente teorização: é, literalmente, um pensamento que vem por detrás [nach] da experiência, que constrói sobre ela, a reorganiza e a interpreta. Os fruto da reflexão são conceitos que vão além do dado, de modo que o entendimento humano tem um papel claramente activo e criativo no conhecimento. Isto, sem implicar apriorismo, deixa-nos longe do empirismo. Pode dizer-se que experiência e reflexão equivalem aos dois aspectos fundamentais da metodologia hipotético-dedutiva.

[10] Nisto distancia-se de Leibniz, cujas mónadas não interagem, "não têm janelas", antes desenvolvem a sua actividade de acordo com um princípio interno, e só se realizam em coordenação, devido à harmonia pré-estabelecida [Leibniz 1714, §7]. A diferença entre ambos os autores tem como efeito, justamente, evitar o racionalismo leibniziano.

A reflexão é catalisada pelas contradições da experiência e acontece que, para Herbart, a experiência, tal como nos aparece, está carregada de contradições; o esforço reflexivo tende a eliminá-las, já que a realidade não pode ser contraditória. Uma coisa, com as suas propriedades, aparece como algo de contraditório, porque a coisa não é mais que a soma das propriedades, porém a coisa é unidade, enquanto as propriedades são múltiplas. A noção de eu é ainda mais paradoxal: a unidade da consciência dá-se na multiplicidade das representações, mas o efeito potencia-se pelo facto de que entre estas está a representação do eu (representação de um representar que remete para outras representações, e assim até ao infinito). Muitas outras noções, como as de espaço, tempo, causalidade e mudança, dão lugar a múltiplas contradições e aporias, exigindo um tratamento propriamente filosófico ou, como diz Herbart, metafísico.

Herbart tinha satisfatoriamente demonstrado – segundo Riemann – que as noções mais básicas do nosso conhecimento do mundo, a começar pela própria ideia de *objecto* com existência autónoma, não são senão conceitos aos quais somos naturalmente conduzidos quando reflectimos sobre as contradições da experiência:

> Herbart forneceu a prova de que também aqueles conceitos que servem à concepção do mundo, e cuja formação não podemos seguir nem na história, nem no nosso próprio desenvolvimento, já que nos são transmitidos irreflectidamente com a linguagem, todos eles, na medida em que são algo mais que puras formas de ligação das representações sensoriais simples, podem ser deduzidos dessa fonte; e, como tal, não precisam ser deduzidos de uma constituição especial da alma humana, anterior a toda a experiência (como as categoriais, segundo Kant).

O matemático tentou mostrar que o mesmo sucede com noções capitais como a de causalidade, ou a de continuidade. Mas continuemos com Herbart, com o que ele chama *metafísica*, uma verdadeira ciência a cujas partes Herbart dá nomes bastante curiosos: Metodologia, Ontologia, Sinecologia e Eidologia; estes nomes são os que Riemann usou para especificar onde concordava com o filósofo e onde não concordava.

A *Metodologia* mostra como se devem modificar os conceitos tomados da experiência para reduzir as dificuldades. Entre os princípios da Metodologia está o de "integração dos conceitos": perante o problema de atribuir um elemento que não pode ser simplesmente atribuído, e muito menos suprimido, ele tem de ser atribuído sob forma de multiplicidade ou variedade [Mannigfaltigkeit]. Isto é, quando tens que adicionar um elemento que entra em contradição com os anteriores, divide e vencerás. Nesta linha de raciocínio, a identidade com contradição de duas coisas supera-se considerando que cada uma está composta de elementos mais simples. Um tal caminho, que Herbart considera inevitável, conduz, em seu entender, aos elementos últimos da realidade: a multiplicidade “dos reais” [Realen], que são a espécie de mónadas da sua *Ontologia*. Estes entes não devem ser identificados com átomos materiais, mas sim pensados como átomos metafísicos: tal como as mónadas de Leibniz são imateriais e essencialmente activos. De qualquer modo, as contradições aparentes resolvem-se nas *relações entre seres* simples.

Ora, Riemann indicou com clareza que repudiava as ideias ontológicas de Herbart e, com efeito, não se encontram nos seus fragmentos filosóficos quaisquer referências aos “reais” nem às mónadas. Num dos fragmentos intitulados “Sobre epistemologia”, de facto dirige uma crítica central à ontologia de Herbart, ao dizer que se um agente tende para a sua autopreservação, então não pode ser um ente, mas antes um estado ou uma relação. Um ente, portanto, não admite variações de grau, não admite alterações perante as quais poderia reagir, preservando-se; para que sejam possíveis desvios, deve tratar-se de um estado ou de uma relação. Mas se isto estiver correcto, então o carácter substantivo dos “reais” de Herbart é contradito pelos atributos centrais que o mesmo autor lhe imputa. De qualquer modo, como veremos adiante, permanecem resíduos leibnizianos e herbartianos nas especulações de Riemann sobre psicologia e sobre Natureza física. Riemann preservou a noção de certos “agentes” que tendem à sua autopreservação, que estão por detrás dos fenómenos de causalidade e que, além disso, entende serem estados. Estados de alguma coisa, claro, mas à pergunta metafísica capital de qual seja este (ou estes) ente(s), cujos estados são os “agentes”, os seus fragmentos filosóficos não dão resposta.

Voltando a Herbart, a chamada *Sinecologia* é, nem mais nem menos, uma teoria do contínuo, que tinha como objectivo clarificar e justificar as noções que envolvem a ideia de continuidade: espaço, tempo, número e matéria. No entender de Herbart, o conceito de continuidade exige um tratamento metafísico porque é contraditório: a continuidade supõe a existência de partes infinitesimais unidas e separadas ao mesmo tempo. A este respeito, devem recordar-se as confusas discussões sobre a “metafísica do cálculo”, que eram habituais no início do séc. XIX, e para as quais porém Gauss contribui com ideias muito interessantes (e, talvez, um pouco herbartianas). Vale a pena indicar também que a noção de continuidade é central para a especulação filosófica leibniziana, e que o próprio Kant tinha posto em relevo as dificuldades e contradições relacionadas com os conceitos de espaço, tempo e matéria.[11] Não é por acaso que Riemann elabora a sua própria lista de “Antinomias”, na qual de novo figura a contraposição entre contínuo e discreto.

[11] ‘Antinomias da razão pura’ [Kant 1787, 432-595], especialmente [454-489].

Herbart considerava que os conceitos que envolvem a ideia de continuidade têm de ser compreendidos no contexto de uma teoria geral sobre a construção de “formas seriais contínuas” [continuierliche Reihenformen], da qual dá uma explicação que poderia chamar-se psicológica. Como pode deduzir-se do texto acima citado, Riemann rejeitou os pormenores da teoria herbartiana da continuidade. Não obstante, parece que recolheu algumas características muito gerais do enfoque herbartiano, o que é consonante com o parecer de vários autores, segundo os quais a Sinecologia de Herbart teria tido influência sobre as suas teorias geométricas[12]. Retornaremos a este assunto mais tarde.

Chegamos, finalmente, à *Eidologia*, a base metafísica das teorias psicológicas de Herbart, a qual inclui uma rebuscada teoria do eu. O conceito de eu não é de todo simples, mas sim um dos conceitos mais ricos e, aparentemente, mais contraditórios de todo o conhecimento humano; isto basta, em seu entender, para tornar ridícula a pretensão de Fichte de tomá-lo como ponto de partida absoluto para a metafísica. Por outro lado, os “reais” de Herbart são interactivos, actuam uns sobre os outros modificando o seu estado e dando lugar a reacções de autopreservação; estas reacções de autopreservação são precisamente a origem das suas percepções ou representações[13]; é que, tal como as mónadas, os reais são essencialmente perceptivos ou representativos. A psicologia toma da metafísica a ideia de que a alma é um real: um ente rigorosamente simples, que inicialmente não tem representações, mas cujas autopreservações, perante as múltiplas perturbações causadas por outros entes, produzem actos de representação. A alma, na sua qualidade simples, é para nós desconhecida, já que não pode ser nem sujeito, nem objecto da consciência; só em relação com todas as suas representações a alma se torna sujeito da consciência, unidade indivisa porém sumamente activa. Assim fica claro que não existe nada de contraditório na multiplicidade de representações que o eu possui.

Herbart afirma que, quando diversas representações se apresentam de uma só vez, entram necessariamente em relações. Se só se apresentasse uma, ela permaneceria ilimitadamente, já que cada uma tende a perpetuar-se (uma espécie de lei de inércia); ao apresentarem-se várias, entram em luta e há um complicado jogo de relações. A psicologia de Herbart estuda estas relações entre as representações, como se opõem entre si ou se “emaranham” umas com as outras, como inclusivamente podem fundir-se entre si. Presta cuidadosa atenção às circunstâncias dessas inter-relações e à possibilidade de as registar por meio de leis matemáticas; Herbart, não

[12] Por exemplo, Russell, *An essay on the foundations of geometry* (1897, reimpresso em Nova Iorque, Dover, 1956), e Torretti, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré* (Dordrecht, Reidel, 1984), 107–108.
[13] Herbart, *Psychologie als Wissenschaft*, vol. 2 (1826), 295. Ver também vol. 1 (1825), 190.

por acaso (como Kant), dava grande importância à elaboração matemática das hipóteses científicas. É a partir daqui, e não na fundamentação ontológica, que Riemann adere às suas teses. De acordo com Herbart, as representações mais intensas podem fazer desaparecer outras sob o umbral da consciência, ainda que isso não as elimine, pois podem ressurgir (sobretudo se vem à consciência uma outra representação relacionada com elas). Pela primeira vez, um estudioso sério destes assuntos desenvolve em detalhe a ideia de um psiquismo subconsciente[14].

Em tudo o que até aqui foi dito, falámos abundantemente de *relações*. O que existe, tanto na realidade última postulada pela metafísica, como nos nossos conteúdos mentais, são sobretudo relações e produtos de relações. Herbart chega a dizer que o conhecimento é, acima de tudo, conhecimento de relações, e atribui-se-lhe a frase "Vivemos entre relações, e de nada mais precisamos". Esta concepção apenas é já suficiente para dar conta da originalidade e "modernidade" do filósofo. Igualmente nova é, na sua psicologia, a oposição frontal à velha distinção das "faculdades" do entendimento, ou do espírito, que ainda está tão presente em Kant. Com isto, como com muitas outras das suas contribuições, Herbart abre caminho ao surgimento de uma psicologia científica.

Como se viu anteriormente, a concepção que Herbart tem da filosofia não é a de um saber sobrenatural, distante das ciências, e ainda menos a de uma simples serva das ciências. A relação entre os distintos saberes é muito mais rica, íntima e interactiva, como se pode ler num dos seus primeiros livros, que Riemann atentamente estudou:

> Aquela filosofia que nos ocupa não se encontra, em absoluto, fora dos restantes saberes, mas forma-se *neles* e *com* eles, como uma sua parte inseparável; tem com eles uma relação totalmente *imanente.*

Não menos interessante é que, em seu entender, a ciência mais próxima da filosofia é a matemática:

> A característica da nossa ciência [filosofia] é a de tomar os conceitos como seus objectos. Pelo contrário, as restantes disciplinas estão absortas na concepção daquilo que, ou está dado, ou podia estar. Inclusivamente a matemática (pois do saber histórico não é preciso falar), tal como se tem estado a considerar, imagina as suas fórmulas abstractas, sempre enquanto fórmulas de casos possíveis, e com prazer simboliza as suas funções mediante o comportamento de curvas, que só o espaço torna possível, a fim de regressar com meios mais poderosos para as dominar. A este respeito formal – e apenas a este respeito – pode ser separada da filosofia. Tratada filosoficamente, converte-se ela própria numa parte da filosofia que, para as

[14] Ideia que, não obstante, tinha sido exposta com toda a clareza por Leibniz na sua *Monadologia* [1714], §6, etc.

> suas próprias necessidades, deveria criar uma teoria das grandezas se já não existisse alguma. [Herbart 1807, 275]

Scholz apoia-se neste texto para sustentar que um dos efeitos que Herbart teve sobre Riemann foi precisamente o de o impulsionar para algo como um tratamento "filosófico" da matemática, estimulando a sua abordagem conceptual e abstracta do assunto[15]. Herbart aconselhava a que toda a disciplina madura se edificasse logicamente em torno de um conceito básico e central; Riemann dedicou-se, com efeito, à procura de conceitos básicos como, por exemplo, o de variedade, em função dos quais fosse possível reestruturar e reorganizar a sua disciplina.

Teoria do Conhecimento

A teoria do conhecimento defendida por Riemann é um desenvolvimento da Metodologia herbartiana, a qual, conforme vimos, expunha o modo como a reflexão modifica os conceitos a fim de os adequar a uma explicação sem contradições do dado na experiência. As ideias de Riemann a esse respeito aparecem registadas em vários fragmentos: o primeiro é um texto a propósito da obra de Fechner, *Zend-Avesta*, que deve ter sido escrito por volta de 1852, e reflecte um ponto de vista ainda imaturo, pois apresenta uma concepção indutivista. Mais tarde, Riemann tornou-se partidário declarado do método hipotético-dedutivo, enfatizando constantemente os elementos hipotéticos e conjecturais nas nossas teorias. Tal encontra-se tanto nos fragmentos intitulados "Sobre epistemologia", como no seu último escrito (1866), contendo reflexões metodológicas a propósito da fisiologia[16]. Centrar-nos-emos aqui nos fragmentos sobre epistemologia que se encontram entre os mais interessantes na sua obra filosófica e que são, em particular, muito importantes para adequadamente compreender a sua famosa lição sobre geometria. Mas a teoria do conhecimento de Riemann também inclui elementos de ressonância kantiana, como é o caso da sua lista de quatro "Antinomias" que comentaremos no final desta secção.

A ciência natural, diz-nos Riemann, é o esforço de conceber a natureza mediante *conceitos* precisos. As teorias científicas são "sistemas conceptuais", tecidos sobre conceitos. Tais sistemas não são meros registos de dados da observação: Riemann está muito distante do positivismo clássico, tão em voga naquele tempo, com a sua tendência para aceitar uma metodologia indutivista. Todo o nosso

[15] "Herbart's Influence on B. Riemann", *op. cit.* [1982], 428.

[16] Neste texto, "Sobre os métodos a empregar na fisiologia dos órgãos sensoriais mais delicados", o leitor encontrará precisões ulteriores sobre o método hipotético-dedutivo, críticas às considerações teleológicas e analógicas que eram então frequentes e às quais não tinha sido alheio o próprio Riemann na sua juventude, bem como uma interessante elaborações dos métodos clássicos de *análise* e de *síntese*.

conhecimento começa na experiência, porém esta – de acordo com Herbart – não oferece apenas *dados* brutos, mas também *formas* nas quais esses dados se estruturam, e *relações* entre os dados. Além disso, a mente humana não se limita a um papel passivo de receptor, de *tabula rasa*, mas é de carácter essencialmente activo, tal como o exprime a ideia herbartiana de reflexão. Assim, corrigindo Kant, Riemann escreve:

> Devemos, como é claro, adoptar as relações causais da experiência; porém, não devemos por isso renunciar a corrigir e a complementar a nossa concepção destes factos da experiência mediante a reflexão.

Como tal, todos os conceitos que empregamos surgiram da experiência e da reflexão, sem que haja nenhuma ideia inata, nenhum elemento *a priori*. Em particular, nem o espaço nem o tempo são anteriores ao dado, e menos ainda as "categorias" (conceitos do entendimento) kantianas.

Dito de outro modo, os sistemas teóricos da ciência contêm sempre *hipóteses*, entendendo-se esta palavra não no sentido newtoniano (o célebre "Hypotheses non fingo" ["Não finjo hipóteses"] que Riemann cita), mas sim no sentido moderno. Hipóteses são "tudo o que o pensamento acrescenta aos fenómenos" ou, em termos herbartianos, o que não aparece imediatamente dado na experiência, mas sim o que é acrescentado pela reflexão. Como se vê, o enfoque metodológico preferido por Riemann é *hipotético-dedutivo*, coerentemente com os ensinamentos de Herbart e também de Weber. Julgamos a correcção de uma teoria, considerando o que a mesma prediz como necessário, ou pelo menos como provável; estas predições são comparadas com o observado e, frequentemente, sucede dar-se um fenómeno que contradiz as predições ou que pelo menos parece improvável à luz da teoria. Todas as mudanças teóricas na história da ciência, diz Riemann, são um resultado deste tipo de inadequações, as quais motivam a procura de uma nova teoria, mais correcta.

Uma peculiaridade da concepção riemanniana, muito específica do seu tempo, é a que a melhoria, ou o refinamento, dos sistemas conceptuais se guia sempre por um *princípio de economia*, um princípio do *mínimo*. Procuramos sempre que a nova teoria se mantenha tão próxima quanto possível da anterior, introduzindo o menor número possível de alterações, com o menor alcance. Não devemos estranhar que Riemann não seja um popperiano, não só no aspecto recém-referido, mas também na ideia implícita de que as sucessivas correcções teóricas progridem em direcção a um sistema conceptual que poderá chamar-se, de pleno direito, verdadeiro[17]. A diferença – de qualquer modo não tão grande – entre Riemann e Popper dá-nos um claro indício

[17] Popper enfatiza o carácter puramente *conjectural* do conhecimento científico até um ponto que outros filósofos consideram exagerado.

do enorme impacto que tiveram, na nossa imagem do conhecimento, as grandes revoluções conceptuais da física nos inícios do séc. XX. E acontece que mudanças como as que conduziram ao conceito de espaço-tempo, a uma alteração de doutrinas básicas sobre a mecânica e a gravitação, ou ao abandonar das ideias clássicas de determinismo e causalidade ao nível quântico, não encaixam assim tão bem numa concepção tão "gradualista" como a esboçada por Riemann. De qualquer modo, ao considerar as propostas deste autor em física vê-se que foi seguramente o pensador do século XIX mais aberto ao tipo de inovações que logo se impunham.

Boa parte dos fragmentos sobre epistemologia de Riemann dedica-se à análise da origem de dois conceitos verdadeiramente fundamentais da ciência do seu tempo: continuidade e causalidade. Já citámos a crítica de Riemann à ideia kantiana de postular o esquema causa-efeito como uma "categoria" ou conceito do entendimento. A doutrina kantiana das categorias garante, é certo, que tais conceitos têm aplicação *necessária* no nosso conhecimento empírico, porém fá-lo a um preço muito elevado, já que *nada* nos dizem sobre como são as coisas em si. As categorias só são objectivas no sentido fraco de "intersubjectivas": impõem-se necessariamente a todos os sujeitos com uma constituição semelhante à nossa, mas não há qualquer garantia de que sejam válidas no que respeita às coisas em si. Pelo contrário, a doutrina de Riemann e Herbart pretende garantir uma *objectividade* muito maior: há uma conexão directa entre os dados, formas e relações que nos são dadas na experiência, e os conceitos que empregamos.

Herbart tinha demonstrado que o conceito de "coisa com existência autónoma" (isto é, de ente ou objecto permanente) surge por reflexão sobre o dado, sobre a notável regularidade e constância nas nossas percepções. Segundo Riemann, isto é da maior importância:

> Esta prova da sua origem na concepção do dado, através da observação sensorial, é para nós importante, *pois só através dela pode ser constatada a sua significação, de uma maneira satisfatória, para a ciência natural*.

Seguindo essa mesma linha, Riemann propõe-se mostrar como "os conceitos básicos da matemática e da física" surgem também por refinamento e melhoria gradual das ideias mais simples que dão conta do dado. É interessante alertar para que estes conceitos básicos são (tirando o de objecto autónomo) os de variação contínua e de causalidade. Sem dúvida que Riemann está a sugerir que o conceito de *continuidade* é a base do conhecimento matemático, e o de *causalidade* a base da teoria física. A matemática seria muito mais bem compreendida em relação com a geometria, a topologia e a análise, do que como uma simples ciência dos números; e a concepção riemanniana da física seria tipicamente "clássica", anterior à grande revolução quântica do séc. XX (não podia ser de outro modo).

Como surgem estes conceitos básicos? Uma vez adoptado o conceito de objecto, embatemos na experiência da mudança, pois esta contradiz a ideia de existência autónoma. Procurando manter a ideia de objecto inalterada, tanto quanto for possível, a nossa reflexão leva-nos a entender as mudanças como variações contínuas. Mas o objecto teria permanecido imutável se não tivesse sobrevindo uma outra coisa, e aqui se encontra a origem da ideia de causa. Não entraremos em detalhes acerca dos restantes comentários que Riemann tece em torno da causalidade, ainda que se deva chamar a atenção do leitor para o facto de que se pensam as causas como sempre estando ligadas a algum agente. Isso parece uma reminiscência da concepção leibniziana das mónadas, ou da herbartiana dos "reais", ainda que – conforme vimos – Riemann recuse esta última. Na verdade, Riemann deixa cautelosamente envolto em mistério quais poderiam ser os componentes últimos do mundo, os elementos substantivos mais simples cujas relações desdobram todos os fenómenos encontrados à superfície das aparências.

Como noutros casos, por exemplo o do próprio Popper, a metodologia hipotético-dedutiva de Riemann apoia-se na noção de *verdade*. Esta noção é entendida na versão clássica de correspondência com os factos, que Aristóteles já expusera:

> I. Quando é que a nossa concepção do mundo é verdadeira?
> "Quando a ligação entre as nossas representações corresponde com a ligação entre as coisas."…
> II. Como se deve estabelecer a ligação entre as coisas?
> "A partir das ligações entre as aparências."

Mas mesmo a este nível Riemann consegue introduzir reflexões inovadoras que não deixaram de ter as suas correspondências no séc. XX. Concretamente, na veia herbartiana, o matemático indica que a correspondência interessante não se dá entre elementos simples dos nossos sistemas conceptuais e elementos simples da realidade, mas sim entre as respectivas *relações*. As relações entre os elementos da nossa representação do mundo devem reflectir fielmente as relações entre as coisas. As explicações de Riemann a este respeito recordam muito a famosa "teoria figurativa" do pensamento e da linguagem proposta por Wittgenstein no início do seu *Tractatus*. As semelhanças incluem a terminologia muito riemanniana de "Bild" e "Abbildung", e as reflexões sobre o grau de "fineza" da representação. Seria muito interessante saber se Wittgenstein, além do mais por estar influenciado pelo físico Hertz, também leu com cuidado as obras de Riemann.

A reflexão sobre a noção de verdade, e sobre o papel que têm as relações ou ligações entre as aparências como critério-chave de verdade, conduz Riemann a ensaiar uma justificação do papel privilegiado que têm as relações *quantitativas* na ciência. Com Demócrito e os pensadores do séc. XVII, começando por Galileu, Riemann traça a distinção entre qualidades sensoriais – cor, timbre e tom, odor, sabor – e relações quantitativas (o que, no séc. XVII se chamavam "qualidades primárias"). As primeiras não existem como tais fora de nós, ainda que existam correlatos das diferenças de intensidade ou de qualidade, e das relações quantitativas. Daí que as relações quantitativas tenham uma relevância especial como fundamento último dos critérios que aplicamos para ajuizar sobre a verdade das teorias:

> Da reflexão sobre a conexão observada entre estas relações quantitativas deve resultar o conhecimento da conexão entre as coisas.

Torna-se claro que o papel da matemática na ciência é, segundo Riemann, essencial.

Do que temos vindo a dizer sobre as teorias de Riemann acerca do conhecimento humano poderia passar a ideia de uma concepção profundamente optimista, que se imaginaria um desenvolvimento gradual da ciência em direcção à plena verdade. Tal ideia é imediatamente corrigida quando se atenta no seu fragmento intitulado "Antinomias", que passamos a comentar. Para começar, é muito curioso que Riemann tenha escrito este texto, cujo referente não pode ser outro senão as famosas contradições, ou "conflitos dialécticos" da razão pura que Kant expôs e analisou ao longo de cem páginas da sua *Crítica da Razão Pura*[18]. Diz muito da sua confiança e da sua ousadia como pensador que Riemann tenha tido coragem para emendar o plano de uma das secções mais amplamente admiradas e respeitadas da grande obra kantiana.

Uma *antinomia* não é outra coisa senão uma antítese inevitável, um par de proposições contraditórias tais que cada uma delas é dedutível a partir de princípios da razão. Como tal, Riemann pensa que aos conceitos que empregamos para defrontar a experiência (tanto a do mundo externo como a dos nossos fenómenos internos, mentais) subjazem antíteses e contraposições inevitáveis. Por isso dizíamos que o fragmento em questão mostra que a sua concepção não é, em absoluto, optimista. Pois bem, o pormenor destas antinomias não coincide com o das expostas por Kant, como menos ainda estão ambos os autores de acordo na sua maneira de entender as relações entre a tese e a antítese de cada antinomia. Tão significativas como a semelhança

[18] Concretamente, no capítulo II do Livro I, Segunda Parte, Divisão Segunda; a referência que acabamos de dar é significativa do estilo exageradamente sistematizante de Kant, que se reflecte tantas vezes no conteúdo da sua filosofia.

exterior do trabalho de ambos são as divergências que Riemann introduz em relação ao filósofo de Königsberg.

A primeira antinomia de Kant tem a ver com as noções de espaço e tempo: à tese de que o mundo tem um limite espacial e um início temporal, contrapõe-se a antítese de que o mundo é *infinito* em ambos os sentidos. A contraposição entre finitude e infinitude aparece, na tabela riemanniana, não como uma antinomia particular, mas sim no próprio título: todas as teses de Riemann teriam que haver com o "Finito, representável", e todas as antíteses com o "Infinito", com "sistemas conceptuais que se situam na fronteira do representável" (na prática, em alguns casos é problemático compreender em que consiste essa relação, como acontece sobretudo com a antítese de II, e talvez com a de IV). O título da tabela de Riemann, e os seus comentários sobre a relação geral entre tese e antítese, revestem-se de especial interesse como fonte para conhecer algumas das suas concepções sobre os fundamentos da matemática. Já dissemos que as teses designam sempre algo "finito", enquanto as antíteses apresentam algo "infinito". Concretamente, ele diz,

> Os sistemas conceptuais da antítese são precisamente conceitos determinados mediante predicados negativos, porém não são representáveis positivamente.

Isto é algo que a tradição teológica sempre tinha dito do conceito de Deus enquanto ser absoluto e providente; mas Riemann está a afirmar que tãopouco podemos representar de modo positivo os conceitos, centrais em matemática, do infinito e do contínuo (nem, também, as ideias de alma e da determinação voluntária do futuro). E continua,

> Justamente por isso, porque é impossível uma representação precisa e completa desses sistemas conceptuais, são inacessíveis à investigação directa e à construção mediante a nossa reflexão. Mas podem ser considerados como situados nas fronteiras do representável, ou seja, pode construir-se um sistema conceptual situado dentro do representável que se transforma no sistema dado por pura variação das relações de grandeza. Se não considerarmos as relações de grandeza, o sistema conceptual permanece invariante, em última análise, até ao limite. Mas no próprio limite, alguns dos conceitos co-relativos do sistema – precisamente aqueles que permitem a ligação entre outros conceitos – perdem a sua representatibilidade.

Diferentemente do que sucede em Kant, a tese e antítese de cada antinomia riemanniana guardam entre si uma relação interna, diríamos quase que orgânica. O modelo desta relação é dado pelo método de *limites* que se emprega para fundamentar a análise infinitesimal e que Riemann associa, já não com Cauchy ou com d'Alembert, mas sim com o próprio Newton. Embora os conceitos da antítese não sejam representáveis enquanto tais, estão bem determinados, e para cada um deles é possível construir um sistema conceptual finito que, “por pura variação das relações de magnitude”, dá-nos, no limite, o sistema da antítese. Tal estabelece a aceitabilidade dos conceitos manuseados na antítese, mas não elimina a antinomia: o mundo pode ser, ou discreto, ou contínuo; ou Deus é intemporal, ou labora no tempo; e assim nos demais casos. Se agora nos perguntarmos se Riemann opta por alguma das alternativas, em meu entender a situação é a contrária: as antinomias apresentam-se com toda a seriedade, e Riemann aparece-nos (como veremos, e com o devido respeito) como o asno de Buridan[β].

Não podemos entrar nos detalhes das antinomias, porque uma discussão pormenorizada levar-nos-ia demasiado longe; porém convém pelo menos citá-las e cotejá-las com as de Kant. A primeira antinomia de Riemann é a contraposição entre a tese de que espaço e tempo são discretos (a pressuposição de “elementos espaciais e temporais finitos”), e a antítese de que ambos são contínuos (a pressuposição do “contínuo”). Tal poderia corresponder, em certa medida, com a segunda antinomia de Kant, ainda que as diferenças de detalhe sejam importantes[19]. Mas o mais interessante é que essa primeira antinomia de Riemann tem um reflexo directo na famosa lição sobre geometria: nela se mantém até ao fim a dúvida sobre se a realidade subjacente às nossas representações espaciais é discreta ou contínua.

Numa leitura superficial, a segunda antinomia de Riemann assemelha-se à terceira de Kant (ambas têm que haver com o conceito de liberdade), e a terceira de Riemann à quarta de Kant (as duas se referem ao conceito de Deus). Mas quando as analisamos com atenção, vemos que a correspondência não se mantém: o famoso filósofo entende por liberdade a faculdade de iniciar um estado em sentido absoluto, enquanto Riemann esclarece que por liberdade entende não o conceito kantiano, mas sim o mais aristotélico poder de decidir entre duas ou mais possibilidades dadas. Isto parece-lhe uma ideia perfeitamente representável, “finita”, já que a “liberdade é facilmente compatível com a legalidade rigorosa do curso da natureza”: basta pensar que o mecanicismo psíquico “adopta, no seu desenvolvimento a particularidade” de tornar o livre arbítrio “necessário”. Ao passo que o conceito de determinismo (e, em concreto, a determinação do futuro através das nossas acções) parece-lhe estar no limite do representável. Enquanto que à antinomia de Deus, Kant contrapõe a

[β] O paradoxo do asno de Buridan é um paradoxo descrito por Aristóteles, no seu tratado *De Caelo* (295b 32); posteriormente, o paradoxo foi atribuído ao filósofo Jean Buridan (1300-1358), a fim de caricaturar o seu determinismo moral: o cão, ao qual Aristóteles punha o problema de optar entre duas apetitosas refeições, é substituído por um asno que, desfalecendo de fome e de sede, deve optar entre um monte de feno e um balde de água. (N. T.)

[19] A segunda antinomia de Kant consiste na afirmação e na negação de que o mundo é composto por elementos ou substancias simples; tal vai além de simples enunciados sobre o espaço e o tempo, excepto se tivermos uma concepção muito sofisticada deles, como parece ter sido o caso de Riemann.

afirmação e a negação de um ser necessário, Riemann contrapõe a ideia de um Deus que opera no tempo governando o mundo (como a sua alma), à de um Deus intemporal, pessoal, omnisciente, omnipotente, sumamente bom (Providência).

A última antinomia de Riemann não tem correlato em Kant. Nela se considera representável ou "finita" a ideia de imortalidade, cuja antítese é o conceito de alma, entendida como "uma coisa em si inteligível que é a base da nossa aparência temporal, dotada de liberdade transcendental, maldade radical e carácter inteligível". Esta concepção não é tão paradoxal como parece à primeira vista a quem foi educado numa cultura marcada pelo cristianismo. É de destacar que, nos escritos sobre psicologia, Riemann fala constantemente de almas, mas esclarece também que a dinâmica das representações torna desnecessário o pressuposto de uma alma como substância ou coisa em si.

II. Riemann Matemático: Topologia e Geometria

Et his principiis via sternitur ad majora.
[E com estes princípios abre-se caminho para coisas mais elevadas.][20]

É bem sabido que a geometria de Riemann se inscreve num dos capítulos mais famosos da história da matemática, o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, e que constituiu um preparativo essencial para a teoria relativista da gravitação. Pode dizer-se, usando uma expressão famosa, que aqui nos encontramos com três gigantes, uns aos ombros dos outros: Riemann às costas de Gauss, Einstein às costas de Riemann. A propósito deste fio de ideias, Einstein escrevia precisamente em 1922:

> Os conhecimentos matemáticos que possibilitaram o estabelecimento da teoria da relatividade geral, temos de os agradecer às investigações geométricas de Gauss e de Riemann. O primeiro investigou, na sua teoria das superfícies, as propriedades métricas de uma superfície imersa num espaço euclidiano tridimensional, e mostrou que estas podem ser descritas mediante conceitos que só guardam relação com a própria superfície, e não com a imersão [no espaço]… Riemann estendeu a linha de pensamento gaussiana aos contínuos de qualquer número de dimensões, e previu o significado físico desta generalização da geometria de Euclides com visão profética… as leis naturais só adoptam a sua forma lógica mais satisfatória quando são expressas como leis do contínuo quadrimensional espácio-temporal.

[20] Frase de Newton, no final de um trabalho seu sobre a quadratura de curvas (integração), que Riemann empregou como título de um trabalho onde desenvolvia e aplicava aspectos analíticos da sua geometria diferencial: "Commentatio mathematica", *Werke,* 391.

Assim, não parece estranho que a lição de Riemann sobre geometria, um texto de apenas quinze páginas, tenha adquirido uma aura lendária.

O leitor do famoso texto deve ser advertido, e tal é logo indicado ao início da introdução. Para evitar o emprego de formalismo matemático, a sua exposição parecerá inevitavelmente vaga e difusa aos leitores de formação matemática. Isto é agravado pelo facto de que Riemann não tornou – nem estava em condições de o fazer – explícitos todos os pressupostos dos seus conceitos, especialmente da sua ideia de variedade (que, no espaço de duas páginas, passa de uma referência a conjuntos em geral, a designar variedades diferenciáveis). Riemann faz livre uso de uma linguagem de estilo filosófico, que pode ser difícil para o leitor contemporâneo, ainda que seja muito precisa; é importante associar a cada termo o significado que Riemann define, e não um qualquer sentido comum na linguagem quotidiana. Dificuldades especiais colocam os termos "determinação", "variedade" e "grandeza". Além disso, o efeito de estranheza vê-se aumentado pelas importantes mudanças que se deram na configuração da matemática desde então. Vale a pena, apesar de todos estes obstáculos, levar a cabo a leitura? Leitores como Dedekind e Weyl indicaram a lição como uma autêntica obra-prima no que diz respeito à exposição, e eu creio também que a resposta é, indiscutivelmente, sim. Mas o leitor deverá saber que ser-lhe-á útil ter alguma ajuda.

A geometria não-euclidiana antes de Riemann

Pode dizer-se que durante o século XIX a geometria perdeu a sua posição de paradigma matemático em favor da análise, elaborada sobre uma base aritmética rigorosa. E, não obstante, disse-se que esse século foi a "idade heróica da geometria", graças à enorme variedade de novidades e desenvolvimentos introduzidos. Aprofundou-se a compreensão das propriedades geométricas, com a qual se transitou da clássica geometria métrica para as geometrias afim e projectiva; iniciou-se o desenvolvimento da topologia, que daria lugar a um dos ramos mais específicos da matemática do séc. XX; desenvolveram-se enormemente a geometria algébrica e a geometria diferencial, etc. O estudo da *geometria projectiva* foi o principal tema de trabalho desde princípios do século, servindo como grande campo de inovação e experimentação; entre muitas outras coisas, conduziu aos primeiros esforços "modernos" de fundamentação axiomática rigorosa, e a uma reorganização do conhecimento geométrico, da perspectiva dos grupos de transformações (o célebre "programa de Erlangen" de Klein). Não obstante, a contribuição mais famosa do século são as *geometrias não-euclidianas*, o que sem dúvida se deve ao alcance que esta inovação teve para a compreensão da natureza da matemática. A este nível filosófico e metodológico, as geometrias não-euclidianas desempenharam um papel capital e revolucionário.

O trabalho de Riemann inscreve-se neste campo e chega, pois, associado aos nomes de Lobatchevski e Bolyai, ainda que se tenha que dizer que foi incomparavelmente mais profundo que os trabalhos destes. A motivação de Lobatchevski e Bolyai foi o velho problema das paralelas, tema predilecto dos apaixonados da matemática, desde a antiguidade. Já que o axioma das paralelas de Euclides é muito mais complexo, e inclusivamente diferente em carácter, dos seus restantes axiomas, não seria possível deduzi-lo de postulados simples? Ao longo de 2.000 anos de tentativas infrutíferas, chegou-se a suspeitar que a resposta não só era negativa, como inclusivamente que era logicamente possível desenvolver geometrias baseadas em axiomas contrários. Os primeiros a estabelecer rigorosamente uma geometria baseada num axioma não-euclidiano (por um ponto exterior a uma recta *r* passa *mais de uma* recta paralela a *r*) foram Lobatchevski e Bolyai, que publicaram por volta de 1830. O logro era impressionante do ponto de vista conceptual, lógico e filosófico, mas em termos matemáticos aproximava-se muito do modelo euclidiano[21].

Lobatchevski e Bolyai estabeleceram equações para a geometria não-euclidiana tridimensional que os levaram a pensar que não havia nisso qualquer contradição. Nestas fórmulas figurava uma constante K da qual dependia o comportamento das figuras geométricas, mas no momento carente de interpretação; K podia variar continuamente, e a geometria euclidiana aparecia como um caso degenerado da geometria de Lobatchevski-Bolyai ($K = 0$). Estes autores acreditaram pois que tinham encontrado a forma mais geral de tratar a geometria, e o segundo chamava-a "ciência absoluta do espaço". Mas há que dizer que com Riemann se alcançou um ponto de vista muito superior, em relação com o problema do espaço; as geometrias de Lobatchevski-Bolyai configuravam-se, por sua vez, como casos muito especiais e particulares.

De qualquer modo, bastaram as contribuições destes predecessores para que tivesse lugar uma mudança revolucionária na concepção do espaço. Até aquele momento, pensava-se que havia plena identidade entre o espaço real e o espaço euclidiano. Acreditava-se que a geometria de Euclides era a única possibilidade conceptual para a mente humana e, mais ainda, que esse espaço conceptualmente necessário e evidente era idêntico ao espaço real. (Não é de estranhar que o

[21] Também Gauss, na sua obra inédita, tinha desenvolvido a geometria hiperbólica. A principal novidade, chave para tornar possível um desenvolvimento completo, foi a introdução do tratamento analítico baseado nas funções trigonométricas hiperbólicas. O leitor pode consultar, entre outras obras, a de J. Gray, *Ideias do espaço* (Madrid, Mondadori, 1992).

apriorismo e o racionalismo tenham sempre procurado no matemática o seu refúgio mais seguro.) Ora, ao constatar-se a possibilidade lógica de toda uma gama de geometrias de Lobatchevski-Bolyai, expunha-se a possibilidade lógica de que o espaço real, físico, fosse não-euclidiano. Gauss, Lobatchevski, Bolyai e Riemann aceitaram plenamente esta possibilidade; reflectindo sobre o assunto, Gauss escrevia ao seu amigo, o astrónomo Bessel, em 1830:

> De acordo com a minha mais íntima convicção, a posição da teoria do espaço no que respeita ao nosso conhecimento a priori é muito distinta da da pura teoria das grandezas: o nosso conhecimento dela distancia-se completamente dessa convicção total da sua necessidade (ou seja, também da sua verdade absoluta) que é própria da última; devemos admitir com humildade que, se o número é puramente um produto do nosso espírito, o espaço também tem uma realidade fora do nosso espírito, e que não podemos prescrever as suas leis completamente *a priori*.[22]

Para tomar outro exemplo, Lobatchevski anunciou em 1826, quando já estava em posse das suas novas ideias geométricas, uma "prova rigorosa do teorema das paralelas"; não se tratava de uma prova matemática, mas sim empírica: tinha medido os ângulos da paralaxe de Sírio e de outras duas estrelas, constatando que a sua soma era muito próxima de 180º[23]. Esta mudança de perspectiva marcou uma transformação de grande alcance na compreensão da matemática: os objectos matemáticos não estão restringidos ao real, mas sim, por assim dizer, superam-no na direcção do possível.

De qualquer modo, as ideias expostas por Lobatchevski e Bolyai entre 1830 e 1840 foram apenas objecto de atenção; nem no caso de Riemann temos sequer qualquer indício de que as conhecesse. Só nos anos de 1860, por ocasião da publicação da correspondência de Gauss, começou uma discussão aberta em torno das geometrias não-euclidianas. Entretanto, Riemann tinha dado a sua conferência em 1854, e logrou obter a aprovação entusiástica de Gauss, mas nunca publicou a obra, seguramente porque esperava um dia escrever um tratado rigoroso e detalhado. Com a sua morte, Dedekind editou-a nas memórias da Academia das Ciências de Göttingen (1868); uma jovem testemunha do momento relatava, anos mais tarde:

> Esta conferência provocou uma tremenda impressão ao ser publicada… Pois Riemann não só tinha levado a cabo profundíssimas investigações matemáticas…

[22] Gauss, *Werke*, vol. 8, 201. A própria teoria dos números reais acabaria por perder também a aura de necessidade e de verdade absoluta que então Gauss lhe conferia.

[23] A soma dos ângulos de um triângulo, na geometria Lobatchevski-Bolyai, é menor que 180º, e será tanto mais pequena quanto maior for a área do triângulo (daí a conveniência de trabalhar com triângulos astronómicos).

> bem como, constantemente, a questão da natureza interna da nossa ideia de espaço, e tinha abordado o tema da aplicabilidade das suas ideias à explicação natural.[24]

O tratamento de Riemann acarretava uma abordagem totalmente nova à questão, baseada na geometria diferencial. Procurarei aqui oferecer uma introdução elementar ao tema, deixando ao próprio Riemann a tarefa de dar explicações detalhadas; mas, antes de mais nada, temos de falar de uma importante contribuição de Gauss.

A geometria diferencial das superfícies de Gauss

Nas geometrias de Lobatchevski-Bolyai surge toda uma série de resultados pouco familiares: os ângulos de um triângulo somam menos que dois rectos; não há triângulos semelhantes de área diferente; existe uma medida absoluta de comprimento (a altura máxima de um triângulo rectângulo isósceles); e inclusivamente existem rectas assimptóticas, isto é, rectas que se aproximam cada vez mais, porém sem que nunca se cortem. Inicialmente, tudo isto fazia pensar que tais geometrias deviam encerrar alguma contradição; e o último resultado paradoxal que mencionei fazia pensar que o que faltava, para poder demonstrar fidedignamente a "verdade" da geometria euclidiana, era uma boa definição de *recta*. Parecia claro que alguma coisa está mal se temos rectas assimptóticas e os demais paradoxos podem ser relacionados com esta situação anómala. Pois bem, o que é, de facto, uma recta? A pergunta era mais complicada do que podia parecer à primeira vista, e quanto mais vasta e cuidadosa foi a reflexão sobre este tema, mais obscura se tornava a suposta necessidade da geometria euclidiana. Herón de Alexandria tinha dito que uma linha recta é uma linha estendida ao máximo; mais precisamente, uma recta distingue-se das curvas que lhe são próximas por possuir um comprimento mínimo. Porém, isto está contudo muito longe de nos levar de volta a Euclides.

Em 1828, foi publicado um famoso trabalho de Gauss que deu origem à geometria diferencial moderna, mas que também pode ser colocado em relação com o problema da natureza das rectas. O seu título era "Disquisitiones generales circa superficies curvas", e nele abria-se caminho ao estudo da geometria das superfícies de um ponto de vista *intrínseco*; para isso, Gauss definia o conceito de *medida de curvatura* da superfície em cada ponto. O objectivo dessa memória era introduzir um "novo ponto de vista" a respeito das superfícies curvas:

[24] Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin, Springer, 1926), 173.

> Se não se consideram as superfícies como contornos de corpos, mas como corpos dos quais uma das dimensões é infinitamente pequena, e também se se consideram flexíveis, mas não extensíveis,

então somos levados a considerar as propriedades "absolutas" que contudo se conservam ao deformar as superfícies sem as rasgar, esticar, ou dobrar.[25] Entre elas está precisamente a medida da curvatura em cada ponto, mas também as considerações relativas a figuras construídas sobre a superfície (ângulos que formam, a sua área, etc.), assim como as considerações relativas às linhas mínimas ou geodésicas sobre a superfície. É notável como o trabalho de Gauss explicitamente aborda as propriedades "infinitesimais" das superfícies; não é fácil traduzir os seus desenvolvimentos numa linguagem livre dessa ideia.

Suponhamos uma qualquer superfície no espaço; a nível local, em redor de um ponto P, as superfícies só podem (salvo em casos anómalos) ter a forma de um barrete, ou de uma sela de montar; além disso, por P passam duas curvas distintas da superfície, que definem as *curvaturas principais*: são as curvas que têm maior ou menor curvatura entre todas as que passam por P. Gauss definiu rigorosamente a curvatura K da superfície em P (de um modo que não precisarei aqui), obtendo como resultado que K é igual ao produto das curvaturas principais k^1 e k^2 em P. Convencionou-se que a curvatura é positiva se a superfície tem forma de barrete, e negativa no caso da sela de montar; um plano euclidiano (e as superfícies que podem deformar-se até coincidir com um plano, por exemplo, uma superfície cilíndrica) tem curvatura zero em todos os seus pontos. A curvatura gaussiana K permite dar um sentido à constante arbitrária em que repousavam os trabalhos de Lobatchevski e Bolyai, pelo menos no caso bidimensional (o próprio Riemann obterá a medida de curvatura para 3 ou n dimensões). A geometria plana de Lobatchevski-Bolyai é caracterizada por uma medida de curvatura constante em todos os pontos, que pode ser negativa, ou até 0, em cujo caso o plano é euclidiano.

O mais importante, não obstante, é que Gauss demonstrava rigorosamente que o conceito de curvatura é *intrínseco*: apenas depende das características internas da superfície, e não da posição desta relativamente ao espaço envolvente. O resultado pareceu a Gauss tão importante que o denominou "teorema egregium"[26]. Para clarificar o que significa, suponhamos que curvamos e deformamos a superfície à vontade, mas sempre sem alterar os comprimentos das curvas que contém; tais transformações *isométricas* respeitam as distâncias intrínsecas entre os seus pontos (distâncias médias ao longo de curvas na superfícies). Ora bem, o teorema egregium

[25] Gauss, "Disquisitiones generales circa superficies curvas" [1828], *Werke*, vol. 4, §13.
[26] Gauss, *op. cit.* [1828], §12 ["Teorema egregium" significa literalmente "teorema notável". N.T.].

diz que a curvatura gaussiana *K* é invariante sob transformações isométricas. É fácil ver – comprove-o o leitor com uma folha de papel – que uma superfície plana finita se pode transformar, desse modo, num cilindro, ou também num cone sem a sua cúspide. O resultado de Gauss implica, pois, que a geometria intrínseca do plano é a mesma que a geometria intrínseca num cilindro ou num cone[27]. As rectas do plano transformam-se, sob a transformação isométrica, nas chamadas *geodésicas* das outras superfícies. Denomina-se geodésica a curva que determina a distância mais curta entre dois pontos *sobre* uma dada superfície (e não no espaço tridimensional envolvente).

Se aplicarmos estes resultados ao problema da natureza das rectas, encontramo-nos de face com uma grande dificuldade. Nenhuma condição que possamos exprimir em termos da geometria do plano nos permitirá caracterizar a linha recta, porque essa mesma condição (intrínseca) aplica-se às geodésicas das superfícies que são suas imagens sob deformação isométrica. Extrapolando para o caso das três dimensões, como podemos saber se o que chamamos "rectas" no nosso espaço não são na verdade geodésicas de um certo tipo? Do mesmo modo, como podemos saber que os nossos "planos" não são superfícies curvas? Tudo indica que Gauss estava muito consciente destes problemas; numa carta desse período escreve que o tema da sua memória

> conduz a um plano impredizível. Esta investigação está profundamente inter-relacionada com muito mais, eu diria com a metafísica do espaço, e acho difícil livrar-me das consequências disso.[28]

Com a morte de Gauss, o seu colega, o professor Sartorius von Waltershausen dava testemunho de conversas em que Gauss tinha dito que a tridimensionalidade podia ser uma limitação das nossas mentes, e onde comparava os homens com planilandeses[γ]:

> Podemos imaginar, disse ele, uma espécie de seres que apenas têm consciências de duas dimensões; talvez os que estão sobre nós nos contemplem de forma semelhante, e [Gauss] tinha deixado de lado certo número de problemas, continuou

[27] Riemann faz referência aos resultados de Gauss que vimos até agora no parágrafo II, 3ª secção da sua lição.

[28] Gauss, *Werke*, vol. 12, 8. Gauss também via relações com a "metafísica dos números imaginários", já que estes se ligam inevitavelmente com as variedades bidimensionais.

[γ] Referência aos habitantes da "Planilândia", figuras geométricas bidimensionais que protagonizam o Romance de Edwin Abbott, *Flatland*, publicado em 1884.

> a dizer na brincadeira, que pensou que poderia tratar geometricamente mais tarde, em circunstâncias mais favoráveis.[29]

Diversas afirmações de Gauss sugerem que via uma relação clara entre o artigo sobre superfícies curvas e a geometria não-euclidiana, e que o seu estudo lhe confirmava a ideia de que o espaço real bem poderia ser não-euclidiano. Há que ressalvar que na dita memória enfatizava resultados sobre a soma angular em triângulos formados por geodésicos que estão ligados a resultados típicos das geometrias não-euclidianas. Pelo final do trabalho expunha o seguinte resultado que, para simplificar, darei para superfícies de curvatura K constante. Suponhamos que é dado um triângulo cujos lados são geodésicos na superfície, cujos ângulos sejam α, β, γ, e cuja área ou conteúdo da superfície seja σ; então, a diferença entre a soma dos seus ângulos com π (dois rectos) será

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi = K\,\sigma.$$ [30]

Voltamos exactamente a encontrar o resultado um tanto paradoxal que tinham obtido Lobatchevski e Bolyai (e o próprio Gauss) nas suas geometrias: a soma angular de um triângulo nelas distancia-se da soma euclidiana em proporção com a sua área (e com a constante K). É importante também saber que, no mesmo período, Gauss estudou com detalhe a pseudo-esfera, superfície de curvatura constante negativa, gerada por rotação de uma tractriz sobre o seu eixo. A pseudo-esfera oferece um modelo natural (ainda que parcial) da geometria de Lobatchevski-Bolyai para o caso das duas dimensões, e como tal seria estudada mais tarde por Beltrami.

Para colocar a questão de outra forma, o anteriormente dito sugere uma assimetria fundamental entre os elementos geométricos de duas e três dimensões que costumamos considerar. Porquanto Euclides aceitasse que as superfícies possam adoptar múltiplas configurações e estar curvadas de múltiplas maneiras, ele e os seus seguidores postulam um espaço muito especial e característico. Riemann notou todas estas implicações no trabalho de Gauss, e usou-o como base para elaborar uma noção de espaço que tem o grau de generalidade justo e necessário para completamente eliminar essa discrepância. O conceito requerido é o das que hoje chamamos *variedades riemannianas*. Justifica-se mencionar neste ponto que, para o final da sua vida, Gauss parecia ter estado obcecado com o tema dos espaços n-dimensionais, para os quais empregava o termo de "variedades"[31].

---

[29] Citado por Bottazzini, "Geometry and "metaphysics of space" in Gauss and Riemann", in Poggi e Bossi, eds., *Romanticism in science* (Dordrecht, Kluwer, 1994), 20.

[30] Gauss, *op. cit.* [1828], §27. Também resultava que o excesso da soma angular de um triângulo formado por geodésicas sobre dois rectos é igual à curvatura total do triângulo (§20).

[31] Num curso de 1850/51 falava delas, estendendo-lhes a métrica euclidiana a nível global; isto sugere, de passagem, que talvez não tenha ido tão longe quanto Riemann nas suas especulações (Bottazzini in *op. cit.* [1994]).

As "Hipóteses" de Riemann

O que Riemann primeiro nos diz na sua famosa lição é que, para analisar em profundidade a inter-relação entre os princípios básicos da geometria, é preciso desenvolver um conceito geral que abranja a ideia de espaço. Noutros termos, se queremos melhor compreender as pressuposições que esconde a habitual ideia de espaço euclidiano, é preciso olhá-la de um ponto de vista mais abstracto. O ponto de partida é de inspiração herbartiana, adornada com as tendências características do próprio Riemann. O autor localiza o conceito requerido, muito acertadamente, na ideia de *variedade n-dimensional*, um conceito essencialmente topológico: o espaço euclidiano resultará como uma variedade tridimensional à qual se impôs uma métrica muito particular. Como veremos, as variedades *riemannianas* são variedades *n*-dimensionais dotadas de uma métrica euclidiana *a nível local*. Mas Riemann destaca, empregando geometria diferencial inspirada em Gauss, que uma mesma variedade riemanniana pode dar lugar a muito diversas métricas *globais*. Tudo isto servirá, no final de contas, não só para compreender melhor as ideias básicas da geometria, como também para tornar possíveis novas concepções geométricas na exploração física do universo, o que para Riemann era muito mais importante.

Atrevo-me a afirmar que, se tivesse escrito o texto em 1900, o título *Sobre as Hipóteses nas quais a Geometria se Fundamenta* teria a palavra "axioma" em lugar "hipóteses"; porém, em 1850, entendia-se por axioma não uma proposição básica de um sistema matemático, mas uma verdade certa e evidente. Na opinião de Riemann, os chamados "axiomas" da geometria euclidiana não têm esse carácter de certeza e evidência[32]: "como todos os factos, não são necessários, mas apenas de certeza empírica, eles são hipóteses". Ainda que, isso sim, dentro dos limites de erro das nossas observações, os princípios da geometria euclidiana tenham um grau de probabilidade muito alto. Porém, de qualquer modo, estes princípios podem ser analisados sob a forma de uma série de hipóteses cada vez mais restritivas, que nos levam das noções geométricas mais gerais até à concretização do espaço euclidiano. Esta ideia é a que guia a brilhante exposição de Riemann.

Formularemos as hipóteses de Riemann para o caso das 3 dimensões, antes de passar a explicá-las nos termos mais simples que nos forem possíveis. Trata-se de uma sequência de hipóteses cada vez mais restritivas; as principais são:

1. O espaço é uma variedade contínua a 3 dimensões (e, concretamente, uma variedade diferenciável);

[32] Assim como não o têm os "axiomas" de Newton.

2. As linhas dentro dessa variedade tridimensional são mensuráveis e comparáveis, isto é, cada segmento possui um comprimento que não depende da posição (não é afectada por um movimento na variedade);
3. O comprimento de um elemento, ou "porção infinitesimal" da linha pode exprimir-se por meio de uma forma diferencial quadrática definida positiva; isto determina a métrica na variedade e permite definir um conceito de *medida de curvatura* que generaliza a noção de Gauss;
4. Os sólidos podem mover-se livremente no espaço sem sofrer deformações métricas ou, como diz Riemann "distensões"; tal determina que a variedade tenha curvatura constante (que é igual a 0 no caso euclidiano).

Passemos pois a uma explicação sucinta, começando pelo que são a topologia e as variedades a *n* dimensões.

Topologia e variedades

A topologia é um ramo muito moderno e abstracto da matemática, que tem em Riemann um dos seus pais e fundadores[33]. A geometria de Euclides é métrica, trabalha sobre uma noção de distância entre pontos, definida pela fórmula que corresponde ao teorema de Pitágoras:

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as coordenadas cartesianas dos pontos do plano cuja distância estabelecemos. Outros tipos de geometria não prestam atenção às distâncias, como acontece com a projectiva que, não obstante, conserva noções como as de recta, cónica, colineação (dois pontos encontrarem-se na mesma linha). Generalizando ainda mais, pode prescindir-se das características tanto métricas como projectivas das figuras, para ficar apenas com as propriedades geométricas sumamente básicas. Isto acontece na topologia, onde se preserva a noção de contiguidade ou adjacência dos pontos, ou, dito de outro modo, a noção de *vizinhança* de um ponto, onde porém as figuras podem deformar-se à vontade, sempre – dito de maneira informal – que não se rasguem e que não juntemos dois pontos que estavam separados. As propriedades topológicas são invariantes sob aplicações contínuas cuja inversa também é contínua (aplicações bicontínuas). Entre estas propriedades está o número de buracos que a figura tem, e de aí a brincadeira habitual segundo a qual o topólogo pode chegar a

[33] Sobre este tema é recomendável a exposição de Guy Hirsch, "Topologie", in J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900* (Paris, Hermann, 1986).

confundir uma chávena de café com um donut (em terminologia matemática, um toro).

Riemann foi um dos primeiros a conceber a topologia como um ramo autónomo da matemática, de carácter fundamental. A mesma ideia tinha sido sugerida em alguns escritos de Gauss, e foi desenvolvida em certa extensão por outro dos seus alunos, Listing, professor de física em Göttingen e co-director do Seminário Físico-Matemático a que Riemann pertenceu. Num trabalho de 1849 sobre o teorema fundamental da álgebra dizia Gauss:

> Exporei a demonstração numa roupagem tomada da geometria de posição, pois aquela alcança deste modo a máxima intuitividade e simplicidade. Mas, em rigor, o autêntico conteúdo de toda a argumentação pertence a um domínio superior da teoria abstracta de grandezas, independente do domínio espacial, cujo objecto são as combinações entre grandezas ligadas segundo a continuidade – um domínio que até ao momento tem sido pouco cultivado, e nele não podemos sequer mover-nos sem uma linguagem tomada das figuras geométricas.[34]

Este é o texto que aponta mais claramente para a necessidade de um novo ramo da "teoria abstracta das grandezas", que deve ocupar-se de questões topológicas. Riemann empregou "definições" da topologia que recordam bastante a de Gauss na secção II.1 da sua lição e na secção II da "Teoria das funções abelianas". Aí diz que esta disciplina considera relações entre pontos e entre regiões de uma variedade, sem pressupor que possam introduzir-se considerações métricas. Neste último ponto, a total independência de considerações métricas, é o que fica mais claro nas deveras obscuras definições de Riemann.

Quanto a Listing, foi precisamente ele quem cunhou o termo "topologia" numa carta de 1836 e num trabalho de 1847 (*Vorstudien zur Topologie*, Göttingen). Riemann, por sua vez, falava de *analysis situs*, termo que etimologicamente quer dizer o mesmo, e que tinha um precedente ilustre em Leibniz (ainda que empregue noutro sentido; os matemáticos europeus, incluindo outra figura-chave como foi Poincaré, continuaram a falar de "analysis situs" até ao primeiro terço do séc. XX). As contribuições mais importantes de Listing estão relacionadas com a demonstração rigorosa do teorema de Euler sobre os poliedros e sua generalização. Ainda que a sua obra não tenha tido grande influência em Riemann, não há dúvida de que deve ter estimulado o seu trabalho neste campo. O nosso autor introduziu novidades essenciais em topologia combinatória, relacionadas com as propriedades topológicas de superfícies e variedades, e demonstrou muito claramente o préstimo que esta disciplina podia ter para a análise e para a própria geometria diferencial.

[34] Gauss, *Werke*, vol. 3, 79.

Riemann diz-nos, numa nota à sua lição, que a secção I desta estabelece os pré-requisitos para as contribuições para a topologia. Efectivamente, na sua primeira secção expõe considerações muito amplas, esboçando inclusivamente um programa do estudo geral da "analysis situs", que parece ter estimulado também os estudiosos de topologia de conjuntos[35]. De qualquer modo, na lição limitou-se a esboçar as ideias imprescindíveis para as considerações geométricas que queria desenvolver: variedade, dimensão e parametrização.

O conceito de *variedade* é, segundo Riemann, o ponto de partida adequado para a topologia e em geral para todos os ramos da teoria das grandezas. O nosso autor parece ter chegado a este novo conceito reflectindo sobre as "superfícies de Riemann", novos objectos geométricos que tinha introduzido na teoria das funções. Estas superfícies colocaram o problema de não poderem ocorrer no espaço tridimensional, mas apenas em espaços com um maior número de dimensões. (Neste aspecto é notável que, segundo o seu mestre Schmalfuss, as "abstracções" de Riemann "sobre as dimensões espaciais" remontem ao seu primeiro ano como estudante universitário, 1846-47.) Por outro lado, havia que justificar a legitimidade da sua introdução, particularmente no contexto da análise, então submetida a exigências bastante rígidas no tocante ao rigor. Surgiam pois problemas fundacionais, que Riemann considera num fragmento sobre variedades e geometria. Lendo esse texto, é bastante plausível que a tentativa de Riemann para fundamentar as suas novas ideias sobre superfícies tenha sido o que o levou ao conceito de variedade[36]. Se assim é, o matemático havia prefigurado, também aqui o desenvolvimento contemporâneo da questão.

Inicialmente, Riemann considerava só variedades contínuas, as quais, de facto, são o contexto natural para a topologia e para as aplicações que dela fazia o nosso autor. Num fragmento de 1852 ou 1853, escrevia:

> Se entre um conjunto [Menge] de determinações distintas de um objecto [Gegenstand] variável é possível uma transição contínua de cada uma para qualquer outra, então a totalidade daquelas constitui uma variedade extensa contínua; cada uma delas chama-se um ponto da variedade.[37]

---

[35] Veja-se o meu livro *El nacimiento de la teoría de conjuntos* (Madrid, UAM, 1993) ou o artigo "Traditional Logic and the Early History of Sets", *Archive for History of Exact Sciences*, 50 (1996).

[36] Há que dizer que Gauss tinha justificado a introdução dos números complexos através da existência de "variedades a duas dimensões" (§6.2; *Werke*, vol. 2, 176), e tal deu a Riemann uma pista. A relação é semelhante à que existe entre o plano complexo de Gauss e as superfícies de Riemann.

[37] Editado in Scholz, "Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie", *Archive for History of Exact Sciences*, 27 (1982), 222. A datação é também de Scholz. Uma definição similar, escrita ao que parece algo depois, encontra-se no princípio do fragmento sobre variedades e geometria.

Aqui encontramos já a característica linguagem de "determinações" [Bestimmungsweisen], porém não como referente a um "conceito geral", como na lição, mas sim em ligação com um "objecto variável", por exemplo um corpo que pode ser aquecido ou arrefecido. O ponto de vista mais geral, e no parecer de Riemann o mais preciso, exprimido em termos de conceitos, é uma novidade da lição inaugural, como também são as referências ocasionais a variedades discretas. Em qualquer caso, as considerações geométricas de Riemann referem-se a variedades contínuas, que além disso se supõem (tacitamente) diferenciáveis. A este respeito, o leitor pode ler os esclarecimentos de Weyl nas suas Erläuterungen, na edição do texto de Riemann.

O nosso matemático lembrou também que o conceito de *dimensão* de um espaço – ou, em geral, de uma variedade – é, na essência, uma noção topológica, desenvolvendo as suas ideias a esse respeito nas secções I.2 e I.3. Para esclarecer a noção de dimensão, recorre à imagem de uma *geração* sucessiva; no essencial, a ideia é que o movimento de um ponto engendra uma variedade unidimensional, o movimento desta uma variedade bidimensional, o movimento de um espaço tridimensional engendra uma variedade a 4 dimensões, e assim sucessivamente. Este tipo de análise da dimensionalidade em termos de um processo de geração "mecânico" tem precedentes muito antigos, para o caso de uma figura ou um corpo (Aristóteles, Próclo, Oresme). A novidade essencial em Riemann é que se superam as barreiras tradicionalmente impostas, segundo as quais é impossível ir além da terceira dimensão. Esta posição tradicional encontra-se ainda em Herbart, e o leitor deve ter em conta o atrevimento que revestia, em 1854, introduzir directamente *n* dimensões, sem prevenir nem vacilar.

Mas a ideia-chave nesta parte da lição é que é possível determinar a posição de um ponto numa variedade *n*-dimensional introduzindo coordenadas ou, como se diz em terminologia matemática, mediante uma parametrização. (Riemann não esclarece os pormenores do tema, em particular a questão de se a parametrização é para toda a variedade, ou se só vale a nível local; à luz do seu restante trabalho, só resta entendê-la como uma parametrização *local*.) O autor afirma, sem o demonstrar, que para estabelecer a posição de um ponto na variedade *n*-dimensional requerem-se, precisamente, *n* parâmetros ou coordenadas. Isto constitui a chave do seu conceito de dimensão, mas contribuições posteriores mostrariam que esta ideia, intuitivamente correcta, necessitava de precisões bastante sofisticadas.

Cantor demonstrou (1878) que os pontos de uma variedade *n*-dimensional podem determinar-se mediante uma só coordenada, se bem que a aplicação que estabeleceu era descontínua. Mais tarde, Peano (1890) deu um famoso exemplo de curva que enche uma área plana, ou seja, uma função *contínua* de um segmento num quadrado. Tudo isto, além de exigir clarificações a propósito da ideia de curva, conduziu a conjecturar que a definição de dimensão dada por Riemann pressupõe aplicações bicontínuas. Nestes termos, o que Riemann estabelece é que, se há uma aplicação biunívoca e bicontínua entre uma variedade dada e o espaço euclidiano n-dimensional $|^n$, então a variedade também tem n dimensões. Este é o teorema de invariância da dimensão, demonstrado por Brouwer em 1911.

Ainda que Riemann dispusesse de todo um conjunto de resultados sobre topologia de superfícies e de variedades n-dimensionais[38], nada disse sobre eles na lição. É natural, pois o anterior era suficiente para os propósitos limitados de uma investigação sobre a noção de espaço. A parametrização da variedade mediante coordenadas abre caminho à introdução das noções analíticas que permitiram o desenvolvimento da geometria diferencial. Do que se trata agora é de dotar a variedade de uma *métrica*: a variedade n-dimensional só tem características topológicas, pode dizer-se que é "informe"; a métrica permitirá passar a formas geométricas e a conceitos como os de distância e ângulo. A grande descoberta de Riemann foi que uma mesma base topológica admite múltiplas métricas distintas.

Conceitos básicos da geometria diferencial de Riemann

Para dar o novo passo de introduzir uma métrica, Riemann estabelece uma hipótese que parecer ser natural, porém, ao mesmo tempo, interessantemente débil: supõe que os segmentos podem deslocar-se pela variedade sem que o seu comprimento se veja afectado. Exigir isto é muito menos que exigir a livre mobilidade de corpos sólidos rígidos; enquanto o último pressuposto conduz necessariamente a variedades de curvatura constante, o primeiro dá lugar a variedades de curvatura variável.

Suponhamos que se trata de uma variedade tridimensional na qual introduzimos coordenadas locais x_1, x_2, x_3. Uma curva será determinada por um conjunto de pontos cujas coordenadas são dadas em função de um parâmetro t, na forma: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. A primeira questão, de carácter métrico, é como se pode determinar o comprimento da curva? Riemann expõe o tema na linguagem dos infinitesimais, pelo que o problema se traduz por encontrar uma expressão para o elemento linear ds, um segmento infinitesimal da curva. Ainda que Riemann esteja perfeitamente consciente de que há múltiplas respostas possíveis, vai reduzir as suas

[38] "Fragment aus der Analysis Situs", *Werke*, 479–82. Segundo Scholz, que conseguiu datar o original, este texto sobre topologia n-dimensional é de 1852/53, e portanto *anterior* à lição sobre geometria.

considerações ao caso mais simples. Se o elemento linear ds parte do ponto P, suponhamos que é possível introduzir coordenadas locais em P de tal modo que

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

onde dx_1, dx_2, dx_3 são as diferenças infinitesimais entre as coordenadas dos extremos P e Q do elemento linear. Chamaram-se, às variedades com esta característica, *riemannianas*; se compararmos a expressão anterior com a que mais acima demos para a distância euclidiana, veremos que é preciso dizer que as variedades riemannianas se comportam como as euclidianas a nível local. Não obstante, a nível global abre-se uma ampla gama de possibilidades.

A anterior expressão para ds só é válida na vizinhança do ponto P; para que ela seja aplicável noutro ponto R seria preciso introduzir novas coordenadas locais em R. Como tal, o problema seguinte é o de encontrar uma expressão geral para o elemento linear; na lição, Riemann só dá indicações gerais (ainda que precisas) a esse respeito, mas noutro trabalho de 1861 introduziu-a explicitamente[39]. Para que a variedade seja riemanniana deve satisfazer em todos os pontos

$$ds = \sqrt{\textstyle\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} dx_i\, dx_k} \text{, ou seja, } ds^2 = \textstyle\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} dx_i\, dx_k,$$

onde os g_{ik} variam continuamente com a posição dentro da variedade, isto é, são funções contínuas das coordenadas x_1, x_2, …, x_n. À expressão da direita na segunda equação chama-se a *forma quadrática fundamental*, e diz-se que é uma forma quadrática definida positiva (já que $ds^2 > 0$ sempre, excepto se todos os dx_i forem zero). Assim, alcançámos o primeiro conceito fundamental introduzido por Riemann na secção II.1 da sua lição.

Dada a expressão geral para ds, torna-se fácil precisar o significado dos conceitos de comprimento de uma curva, ângulo entre duas curvas, área e volume, etc.; todas estas noções métricas dependem das funções g_{ik}. Por exemplo, a longitude l de uma curva será dada por uma integral definida ao longo da curva, $l = \int ds$. Também é possível encontrar agora os geodésicos, ou curvas de comprimento mínimo entre dois pontos, para uma variedade dada: trata-se de um problema de cálculo de variações, o qual conduz a uma equação diferencial que as geodésicas devem respeitar. Demonstra-se, por exemplo que, num pequeno domínio, cada dois pontos da variedade estão unidos por uma geodésica.

Vejamos um exemplo de forma quadrática fundamental. Depois da formulação da teoria de relatividade especial por Einstein (1905), o grande matemático Hermann Minkowski, que também trabalhava em Göttingen, indicou que estas ideias podiam

[39] Veja-se “Commentatio mathematica”, *Werke*, 401–04.

exprimir-se mediante a geometria diferencial. Introduziu assim o chamado universo de Minkowski, uma variedade espácio-temporal a 4 dimensões cujos pontos representam eventos, e cuja métrica é dada de forma geral por

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2}.$$

Como digo, esta é a expressão global e não apenas local para *ds*; pode ver-se que se trata de um espaço bastante simples, de curvatura constante e quase euclidiano. Se se introduz uma mudança de variáveis, com a variável temporal imaginária $x_4 = i\,c\,t$ (onde $i = \sqrt{-1}$), o tratamento formal do novo espaço é totalmente análogo ao de um espaço euclidiano quadrimensional. A condição de que *ds* seja invariante para sistemas de referência de Galileu, tem como consequência a validade das transformações de Lorentz, nas quais Einstein se baseou.

Riemann conclui a secção II.1 dizendo que, para poder abranger as "diferenças essenciais" entre todas as variedades representáveis mediante a forma quadrática fundamental, "é necessário eliminar as dificuldades que emanam do modo como a representamos, o que será alcançado se escolhermos as grandezas variáveis de acordo com um princípio determinado". Assim são pois precisos novos conceitos que permitam determinar em abstracto a natureza de uma variedade dada, e Riemann localiza-os na ideia de *medida de curvatura*, generalização da curvatura de Gauss para superfícies. A medida de curvatura tem a função de exprimir até que ponto as propriedades geométricas da variedade se diferenciam das propriedades de um espaço euclidiano; torna-se uma medida da não-euclidianeidade da variedade.

Recorde-se que a curvatura gaussiana era um conceito intrínseco, que não implicava a ideia do espaço envolvente no qual podia estar imersa a superfície em questão. O mesmo se passa com a curvatura de Riemann, pelo que não há necessidade de pensar na variedade como se estivesse inserida noutra variedade a mais dimensões. A medida de curvatura define-se intrinsecamente, dentro da variedade dada, sobre a base da forma quadrática fundamental que exprime a sua métrica. Em cada ponto teremos curvaturas distintas para direcções à superfície distintas, ainda que, como Riemann estabelece, bastem $n = \frac{n-1}{2}$ valores em cada ponto para determinar totalmente a métrica. Assim, numa variedade bidimensional (uma superfície), basta dar uma medida de curvatura em cada ponto; numa variedade tridimensional, 3 curvaturas; numa quadrimensional como a de Minkowski–Einstein, 6 curvaturas; e assim sucessivamente.

Para definir a curvatura, Riemann considera dada num ponto *P* uma superfície lisa (uma subvariedade bidimensional) formada por geodésicos que passam pelo ponto; no caso a 3 dimensões, a direcção de um geodésico ficaria dada por dx_1, dx_2,

dx_3, a direcção de outra por dx'_1, dx'_2, dx'_3, e todos os demais geodésicos da superfície lisa são exprimidos na forma linear binária

$$dy_i = \lambda\, dx_i + \lambda'\, dx'_i \quad (\text{para } i = 1, 2, 3).$$

Fica assim definida uma direcção à superfície no ponto P, e trata-se de dar a curvatura da variedade nesse ponto e nessa direcção. Não entraremos em detalhes. Basta dizer – com vista a facilitar a compreensão do texto original – que Riemann considera uma certa expressão homogénea do segundo grau, a qual denominaremos Ω, e além disso, a área ou conteúdo da superfície Δ do triângulo infinitesimal de vértices (0,0,0), (x_1, x_2, x_3), (dx_1, dx_2, dx_3). O autor afirma que, se se define a curvatura em $P = (x_1, x_2, x_3)$, para a direcção estabelecida, como

$$K = -\frac{3}{4}\frac{\Omega}{\Delta^2}$$

obtém-se uma medida de curvatura a qual, no caso bidimensional, coincide exactamente com a curvatura de Gauss.

Assim, pois, a curvatura de Riemann para uma variedade tridimensional, num ponto P, pode ser vista como um conjunto de 3 valores, cada um dos quais será uma curvatura gaussiana para uma direcção à superfície em P. Estes valores da medida de curvatura são independentes entre si, e podem variar de um ponto para outro na variedade. Deste modo, vê-se com claridade que as variedades riemannianas são, em geral, de curvatura variável

Após a publicação da lição de Riemann, vários autores começaram a estudar os aspectos analíticos do seu trabalho, os invariantes diferenciais associados com a geometria riemanniana. Isto acabou por levar ao desenvolvimento, entre 1887 e 1901, do que viria a chamar-se o *cálculo tensorial*, às mãos dos matemáticos italianos Ricci e Levi-Civita. Os tensores, que facilitam a expressão de propriedades geométricas e leis físicas, converteram-se na ferramenta habitual para o tratamento da geometria diferencial riemanniana. Deste modo, a medida da curvatura costuma ser introduzida mediante o chamado *tensor de curvatura*.

O interesse pela geometria diferencial e o cálculo tensorial desencadeou-se após a publicação, em 1916, da teoria geral da relatividade de Einstein. O grande físico considerava um espaço-tempo de métrica riemanniana,

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1{}^2 + 2\, g_{12}\, dx_1\, dx_2 + \ldots + 2\, g_{34}\, dx_3\, dx_4 + g_{44}\, dx_4{}^2,$$

onde as funções métricas g_{ik} dependiam da presença de matéria nas distintas regiões do espaço. A curvatura em cada ponto, que é variável, exprimia-se por meio do chamado tensor de Ricci.

Aplicações geométricas

Com o que foi dito, analisámos as três primeiras hipóteses-chave de Riemann: a 1. levou-nos ao campo da topologia, ao conceito de variedade contínua *n*-dimensional; a 2. e a 3. introduziram-nos nas considerações métricas da geometria diferencial (expressão para o elemento linhear *ds* e definição de curvatura). Definidas assim as variedades riemannianas a *n* dimensões e de curvatura variável, Riemann tinha estabelecido um ponto de partido muitíssimo geral, a partir do qual contempla o caso particular do espaço euclidiano. Este espaço apresenta a peculiaridade de a curvatura ser igual em todos os pontos e em todas as direcções à superfície; de facto, a curvatura é sempre = 0. Como passo prévio a dar no seu estudo, era natural que considerasse o caso mais geral das variedades de curvatura constante.

A hipótese física que conduz às variedades de curvatura constante é a seguinte: que os sólidos rígidos possam mover-se livremente no espaço, sem sofrer deformações métricas (ou, como diz Riemann "distensões"). Esta hipótese estabelece uma certa homogeneidade do espaço, e é a forma mais simples de conceber os fenómenos da experiência comum, de modo que a geometria tinha sempre assumido que era esse o caso. Mas Riemann estava em condições de afirmar que tal pressuposto não conduz directamente ao espaço euclidiano, mas sim apenas a variedades de curvatura constante K = α, onde α será um número positivo ou negativo, ou zero. Sem entrar em demonstrações, Riemann afirmava, continuando, que nestas variedades a forma quadrática fundamental que exprime o elemento linear pode apresentar-se sob a forma:

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)} \sqrt{\left(ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2\right)}$$

que dou aqui para o caso particular das 3 dimensões. O leitor notará que se os g_{ik} da expressão geral para a forma quadrática fundamental ficaram reduzidos a uma única função da posição que depende apenas do parâmetro α; além disso, no caso euclidiano teremos α = 0 e a expressão *ds* reduz-se efectivamente à função esperada.

No caso de α negativo, o que obtemos são precisamente as geometrias de Lobatchevski-Bolyai, pelo que leitor pode agora apreciar até que ponto ficam reduzidas a um caso particular dentro da geometria riemanniana. Na lição, Riemann não indicou esta relação explicitamente; os historiadores tendem a pensar que, ou não conhecia a obra desses predecessores, ou preferiu evitar alusões demasiado explícitas a um tema controverso[40]. O caso de α positivo leva a que, por vezes, se denominem (de forma equívoca) geometrias não-euclidianas de Riemann; mais adequado será chamá-las geometrias *elípticas*, reservando a expressão "riemannianas" para o caso mais geral que abrange também espaços de curvatura variável. Os nomes de geometria "hiperbólica" para a de Lobatchevsky-Bolyai, e geometria elíptica para o outro caso, foram propostos por Felix Klein; têm a sua origem na geometria projectiva, na maneira projectiva de alcançar ou definir essas duas situações não-euclidianas.

A ilustração que se costuma dar para essas geometrias está sugerida pelas considerações de Riemann no parágrafo II.5, ainda que seja mais concreta que elas. Um modelo euclidiano, definível dentro do espaço $|^3$, da geometria hiperbólica a duas dimensões é dado pela pseudo-esfera que estudaram Gauss e Beltrami; o seu único defeito é que não serve como modelo de todo o plano hiperbólico, mas sim apenas de uma parte do plano. Aqui é fácil ver como pode acontecer termos múltiplas paralelas a uma "recta" (geodésica) dada. O modelo da geometria elíptica é a geometria sobre a esfera, onde as geodésicas ou "rectas" são os círculos máximos. Também este modelo possui um defeito, fácil de corrigir: as "rectas" cortam-se em dois pontos; a solução é considerar idêntico cada par de pontos diametralmente opostos, ou, se se preferir, entender por "ponto" um diâmetro da esfera; agora, cada duas rectas cortam-se em apenas um "ponto", verificando-se todos os axiomas. O italiano Beltrami, que tinha discutido com Riemann durante a sua estadia naquele país, foi (em 1868), o primeiro matemático que explicitou estas ideias, incluindo também uma consequência interessante: se houvesse uma contradição na geometria elíptica (ou hiperbólica), ela poderia ser traduzida na geometria da esfera (pseudo-esfera) e, como tal, na geometria euclidiana tridimensional. Reciprocamente, supondo que a geometria de Euclides é consistente – não contraditória –, a geometria elíptica e a hiperbólica também têm de sê-lo. Foi o primeiro resultado de consistência relativa estabelecido explicitamente por um matemático.

Durante o séc. XIX apenas se consideraram os espaços de curvatura constante, enquanto que os espaços mais gerais de Riemann caíram no esquecimento, como algo aparentemente fantasioso. Já dissemos que a forma mais simples de conceber os fenómenos da nossa experiência, a que os geómetras tinham vindo a assumir, era pensar que os sólidos rígidos se movem livremente no espaço, sem se deformarem, nem esticar ou contrair. O grande fisiólogo e físico Helmholtz, que escreveu sobre estes assuntos na altura em que se publicou a lição de Riemann, seguiu esse caminho.

[40] Recorde-se de que estava a pronunciar a sua lição inaugural como *Privatdozent* ou, como dizemos hoje, professor assistente; não obstante, esta segunda explicação não convence muito, dada a radicalidade das suas restantes afirmações e do seu próprio ponto de partida.

Descartando a noção de linha, ou segmento unidimensional, como uma pura abstracção (e com ele descartando o axioma riemanniano da constância do comprimento para os segmentos), procurou uma base de tipo operacional sobre a qual estabelecer a geometria, e defendeu que a geometria pressupõe sempre o manuseamento de corpos rígidos (regras) e a sua livre mobilidade. O ponto de partida devia ser, pois, a constância das longitudes num sólido rígido e a consequência: só têm sentido os espaços de curvatura constante. Não obstante, este raciocínio distanciava-se do conhecimento de Riemann, pois fazia passar por "factos positivos" o que não são senão as nossas interpretações habituais dos factos (hipóteses). Não é por acaso que o artigo de Helmholtz se intitulou, numa clara réplica a Riemann: "Sobre os factos nos quais a geometria se funda"[41]. Einstein (que ocasionalmente também se inclinou para o operacionalismo, ainda que, como gostava de enfatizar, só de forma oportunista e não sistemática) acabaria por mostrar que mesmo do ponto de vista físico tem sentido ampliar a perspectiva e contemplar a possibilidade de espaços riemannianos no sentido mais geral.

Aplicações físicas

Como poderá saber-se se o espaço físico é euclidiano? Riemann explicita-o na secção III.1: basta comprovar que a soma dos ângulos de um triângulo é *em todo o lado* igual a 180º. Supondo a livre mobilidade dos sólidos rígidos (curvatura constante), basta pois comprová-lo no caso de um só triângulo, critério que já tinham usado Lobatchevski e Gauss. Para tal fim, empregavam-se as medições astronómicas de paralaxes e, como disse Riemann na secção III.3, delas segue-se que α parece efectivamente ser zero, ressalvando que a região do espaço acessível aos nossos telescópios seja, comparativamente, muito pequena.

Pois bem, Riemann encaminha-se para a física em dois passos, considerando primeiro a extensão de considerações geométricas à escala astronómica, e depois a sua extensão à escala atómica ou subatómica (ainda que naturalmente ele, como bom defensor do pleno contínuo, não empregue esta última expressão). A sua primeira e muito profunda indicação é a de que devemos ser cuidadosos e empregar a distinção capital entre propriedades topológicas (o que chama "relações de extensão") e propriedades métricas do espaço. Assim, quando julgamos que as rectas são infinitas, há na realidade duas propriedades envolvidas: a topológica é a pura ilimitação (que se encontra já na linha de uma circunferência), a métrica é o que propriamente se deveria

[41] "Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen", *Nachrichten Königliche Gesellschaft der. Wiss. Göttingen* (1868), 193–227; in Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen* vol. 2 (Leipzig, 1883).

chamar infinitude. Com esta observação, resolvia-se o paradoxo aparentemente irresolúvel escondido por detrás das geometrias elípticas, e abria-se caminho de novo em direcção à cosmologia, baseada na relatividade geral.

Não obstante, os problemas acerca do cosmos no seu conjunto pareciam a Riemann assuntos frívolos; recordemos a sua afirmação de que só no infinitamente pequeno, só para pontos no espaço e no tempo, podem encontrar-se as leis naturais verdadeiramente elementares. É um pensamento que guiou todo o trabalho de Riemann sobre física e física matemática, de acordo com o qual todo o essencial se joga nas hipóteses que podemos estabelecer e comprovar sobre a constituição infinitesimal do mundo. Riemann propõe-nos três considerações fundamentais[42]:

1. As confirmações empíricas que podemos realizar sobre a métrica no espaço baseiam-se no emprego de corpos sólidos e raios de luz, "conceitos empíricos" que perdem a sua validade no infinitamente pequeno;
2. A independência dos corpos com respeito à posição, a sua livre mobilidade sem deformações, continua a ser uma hipótese; basta negá-la para que o nosso conhecimento da geometria do mundo a escalas médias e grandes não tenha nenhuma implicação no muito pequeno;
3. Uma hipótese ainda mais básica é a que nos conduz à forma quadrática fundamental, mas esta não é mais que um tipo de métrica entre muitas outras.

Por tudo isto, continua, é concebível que as relações métricas no infinitamente pequeno não concordem com a geometria de Euclides; "e é-se de facto obrigado a aceitar isto enquanto não se lograr explicar os fenómenos de modo mais simples".

Mas o ousado pensador de Göttingen não se detém aqui: o parágrafo que se segue é um tesouro, o qual indica do modo mais claro a sua estatura intelectual. A questão da geometria à escala infinitesimal está intimamente ligada com o fundamento interno, físico, que poderia ter a métrica. Se a realidade que subjaz à nossa representação do espaço é discreta, tal pode ser já suficiente para determinar a questão. Pois bem, se a suposição do contínuo físico está correcta, "[devem] procurar[-se] os fundamentos das relações de medida fora dele, nas forças que […] actuam" sobre o espaço. Como é natural, Riemann tinha aqui em mente os problemas da unificação da luz, calor, electricidade, magnetismo e gravitação, que o obcecavam nas suas especulações físicas do momento. Weyl acreditou, no entusiasmo da recém-formulada relatividade geral, que essas proféticas e obscuras palavras ficavam por fim esclarecidas com a contribuição de Einstein. Hoje é possível prever que irão ainda

[42] O nosso autor deixou claro, numa nota de pé de página, que estava especialmente insatisfeito com as breves considerações da secção III.3 da sua lição; esta exigia "ser reformulada e desenvolvida".

mais além, e resta esperar que alguma contribuição do séc. XXI, relacionada com o problema da gravidade quântica, no-las faça ver a uma nova luz[43].

Falta dizer que, naturalmente, Riemann só pôde ter intuições de aspectos muito parciais: pouco sabia da noção contemporânea de campo, nada do espaço-tempo einsteiniano, nem (obviamente) da mecânica quântica. Se a sua frase continua a dar que pensar, isso deve-se sobretudo ao fascínio que pode exercer um aforismo, e à condensação de conotações e sugestões que pode encerrar.

Ainda que a física do séc. XX tenha dado a verdadeira medida do valor das ideias geométricas de Riemann, estas não tiveram que esperar tanto para encontrar aplicações físicas. A primeira, de carácter bem mais formal, deu-a o próprio Riemann no seu trabalho de 1861, conhecido como *Preisschrift* de Paris e dedicado a um tema aparentemente muito distante: a propagação do calor num corpo rígido homogéneo, com preservação de um sistema dado de isotermas[44]. O seu estudo do problema aplicava os métodos analíticos básicos da geometria diferencial, o que lhe deu ocasião para desenvolver – ainda que de um modo demasiado sucinto – as ideias relativas à forma quadrática fundamental e à medida de curvatura que indicámos. (Aí se encontram, entre outras coisas, o símbolo de quatro índices que pode ser interpretado como tensor de Riemann, e o que Einstein chamava a “condição de Riemann” para as funções g_{ik}.) Outra aplicação mais estrita foi o emprego de um espaço riemanniano tridimensional para representar as relações de proximidade entre as cores; Herbart equivocava-se ao pensar que bastavam duas dimensões[45]. Outras mais aplicações surgiram em campos como a mecânica, por exemplo o espaço de configuração de um sistema. Em geral, desde o passo decidido em direcção à abstracção que Riemann deu, o pensamento geométrico encontra aplicação nos mais diversos campos, por distantes que pareçam da ideia tradicional de espaço.

(Tradução de S. Varela Sousa)[δ]

[43] Como provavelmente o leitor sabe, o problema mais profundo que tem perante si a física é o de obter uma unificação entre a teoria relativista da gravitação e a teoria quântica; nisto trabalham os especialistas em gravidade quântica, guiados pela obra de Witten, na qual se empregam conceitos muito modernos de geometria e topologia.
[44] Riemann, “Commentatio mathematica”, *Werke*, 391-404.
[45] Foi nesta direcção que Helmholtz trabalhou.
[δ] Tradução revista por Mário Bacelar Valente de Sousa, a quem o autor e o tradutor manifestam a sua gratidão.

Bibliografia

Bottazzini, Umberto, *The Higher Calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, New York, Springer, 1986.

Dunnington, G. W., *Carl Friedrich Gauss. Titan of science*, New York, 1955.

Ferreirós, J., *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854–1908*, Madrid, Ediciones de la Universidad Autónoma, 1993, caps. 3 e 10.

Grattan-Guiness, I., *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910*, Madrid, Alianza, 1984, caps. 3 e 4.

Gray, J., *Ideas de espacio*, Madrid, Mondadori, 1992, cap. 12. [Esta obra contém também uma introdução às teorias da relatividade.]

Harman, P. M., *Energía, fuerza y materia. La estructura conceptual de la física en el siglo XIX*, Madrid, Alianza;

Herbart, J. F., *La pedagogía general derivada del fin de la educación*, Madrid, La Lectura, 1914; Barcelona, Humanitas, 1983.

Laugwitz, D., D. Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826–1866. Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, Basel, Birkhäuser, 1998.

Maxwell, J. C., *Escritos científicos*, ed. J. M. Sánchez Ron, Madrid, CSIC, 1998;

Scholz, Erhard, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriff von Riemann bis Poincaré*, Basel, Birkhäuser,1980.

Torretti, Roberto, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht, Reidel, 1984.

Wiederkehr, K. H., *Wilhelm Weber. Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizität*, Stuttgart, 1967.

A Visão Riemanniana de uma Nova Abordagem à Geometria

Erhard Scholz
(Universidade de Wuppertal)
scholz@math.uni-wuppertal.de

O Conceito Geral de Variedade e as *Formas Seriais* de Herbart

Como pode um matemático delinear uma visão *fundacional*-mente nova de uma disciplina matemática? Pode virar-se para a filosofia da matemática e falar *sobre* matemáticas, isto é, a um meta-nível, reflectindo sobre o seu próprio trabalho e o de outros matemáticos. Ou pode tentar esboçar a arquitectura da nova disciplina matemática em questão. Neste último caso tem de introduzir conceitos, construções e teoremas como tijolos técnicos centrais de uma teoria matemática. Normalmente, ele pode gizar sobre toda a rede de resultados de outros cientistas, o que aproxima a sua visão da tradição e atenua a novidade dos seus resultados. Assim, se é uma quebra epistemológica que se intenciona, tem de se tomar partido de pelo menos alguns elementos da primeira aproximação, mais filosófica. As ocasiões para viragens epistemológicas agudas são raras na história das matemáticas. A contribuição de Riemann para a geometria é um dos mais proeminentes exemplos.

Como bem se sabe, Riemann organizou a sua abordagem à geometria em torno do novo conceito de *variedade* (*Mannigfaltigkeit*), o qual, por razões evidentes, não podia definir num sentido matemático técnico. Como tal, fê-lo de um modo semi-filosófico, trabalhando consciente e cautelosamente sobre pistas de C. F. Gauss, que tinha falado geometricamente sobre números complexos (Gauss, 1831) e J. F. Herbart que tinha defendido o uso de uma figuração imaginativa geométrica em todo o tipo de formações conceptuais, as suas denominadas *formas seriais* (*Reihenformen*). Em termos vagos, uma forma serial contínua é produzida na imaginação quando uma classe de imagens mentais, ou representações (*Vorstellungen*), é sujeita ao que Herbart chamou uma *fusão gradual* (*abgestufte Verschmelzung*), isto é, uma fusão mental que não destrói cada representação individualmente tomada, mas aglutina-as, resultando daí que uma transição contínua de uma para outra se torna possível (Herbart, 1825, 193*)[1]. Riemann não se preocupou muito com a teorização ontológica específica que Herbart deu deste processo, *prima facie* psicológico, de formação de conceitos, naquilo que Herbart chamou de *sinecologia* (*Synechologie*).

Riemann antes preferiu aludir, apenas vagamente, a esta concepção Herbartiana (1854, pp. 160-161 deste dossier). Pressupôs a existência de conceitos, matemáticos ou não, que podem surgir como resultado de uma "fusão gradada" nas formas seriais[2]. Apropriou-se do resultado e abriu-o a considerações matemáticas, assim formando o seu conceito de *grandeza de múltipla extensão* (*mehrfach ausgedehnte Grösse*) ou *variedade*.

Reformulando a sua abordagem brevemente: em contraste com uma aproximação teórica estabelecida, Riemann pressupôs um conceito tomado de um qualquer campo de investigação, e como tal pré-existente num certo sentido epistémico em ambos os níveis da lógica tradicional, intensão (definida por propriedades, nos termos do campo especificado) e extensão (provida de um conjunto de instanciação bem definido). Para Riemann, o aspecto extensional do conceito foi de primeira importância, com relativamente pouca penetração nas questões fundacionais relacionadas. Tirando umas esparsas – mesmo à luz dos posteriores, importantes, desenvolvimentos da teoria dos conjuntos – observações sobre variedades finitas ou discretas, Riemann avançou directamente para esses casos onde as especificações particulares do conceito admitem *transições contínuas*. Tal deveria ser tomado num sentido intuitivo, pois o conceito de continuidade só viria a ser analisado matematicamente após as definições formais dos números reais terem surgido e as ideias teóricas sobre os conjuntos terem sido formuladas, ou seja, não antes de 1870/80[3]. A abordagem de Riemann foi, de algum modo, paralela à introdução das formas seriais de Herbart; mas Riemann especificou ainda mais a ideia, através de uma sucessiva reconstrução local, num sentido quase-cinemático, por parâmetro-1, parâmetro-2, …, parâmetro-(n-1) e, finalmente, a variação parâmetro-n na determinação das especificações do conceito. Nestes casos, ele admitiu a evidente,

[1] Um asterisco numa citação de Herbart indica que Riemann leu e seleccionou a passagem correspondente durante os seus estudos da filosofia de Herbart. Para mais detalhes, ver [Scholz, 1982a].

[2] Riemann enfatizou, contudo, que, de acordo com a sua posição e em contraste com a de Herbart, tais *formas seriais* contínuas (Herbart) ou *grandezas extensivas* (Riemann) são muito mais frequentes nas "altas matemáticas" do que noutras áreas do conhecimento.

[3] Cf. [Johnson 1979/1981, 1987], [Moore, 1989].

mas drasticamente generalizada, terminologia geométrica de *ponto* para uma especificação particular do conceito geral (variedade).

Outro aspecto desta reconstrução local é, de acordo com Riemann, a possibilidade de introduzir sistemas com *n*-funções, cujos valores separam (localmente) pontos na variedade. Isto conduz a sistemas de coordenadas que tornam a variedade acessível às construções matemáticas e a posteriores investigações. Neste ponto, Riemann até aludiu à possibilidade de variedades a infinitas dimensões[4]. Esta abordagem é semelhante à da introdução moderna das variedades topológicas, diferenciais, riemannianas, etc; sendo contudo o papel do espaço topológico tomado, em sentido vago, por um tipo Herbartiano de *forma serial*, sustido na intuição matemática.

Geometria Diferencial

Logo na sua comunicação inaugural (1854), Riemann apontou claramente para uma distinção básica entre as investigações matemáticas que são possíveis nas variedades, entre aquelas que são «independentes da medição» (analysis situs), e aquelas que assumem estruturas métricas (geometria diferencial). Embora Riemann aludisse apenas muito brevemente na sua comunicação ao primeiro ramo desta divisão (*analysis situs*), restringindo-se, a esse respeito, à reconstrução local e à escolha de coordenadas em $\mathbb{R}^n$, era já bastante claro para ele que a teoria topológica das variedades era por si só um assunto matemático desafiante e promissor. Retornarei a este ponto na próxima secção deste artigo.

O principal assunto da comunicação de Riemann, contudo, era geometria métrica de variedades, o qual ele introduziu como uma profunda generalização da geometria diferencial de superfícies de Gauss. É verdade que Gauss tinha preparado o caminho para Riemann da melhor maneira possível, desenvolvendo a natureza intrínseca da geometria métrica das superfícies no seu *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828)[5]; e Riemann (1854, pp. 160-161 deste dossier), muito

[4] "Repetindo este processo *n* vezes, a determinação da posição numa variedade de extensão a *n*-dimensões é então reduzida a *n* determinações da grandeza, e como tal a determinação da posição numa dada variedade, quando isso é possível, é reduzida a um número finito de determinações quantitativas. Há variedades nas quais a determinação da posição não requer um número finito, mas ou uma série infinita ou uma variedade contínua de determinações da grandeza. Tais variedades formam, por exemplo, as possíveis determinações de uma função para uma dada região, as formas possíveis de uma figura no espaço, e por aí fora.", Riemann, 1854, p. 163 deste dossier.

[5] Em particular, desenvolveu o papel central do *Theorema egregium* (a determinação intrínseca da curvatura da superfície) e o *Theorema aureum* (a soma dos ângulos de triângulos geodésicos).

claramente, referiu-se a isso. Não obstante, o conceito de Gauss estava severamente restringido por aderir ao quadro conceptual do espaço euclidiano. As suas superfícies estavam sempre inseridas no espaço euclidiano tridimensional, mesmo se a sua investigação métrica conduzia a aspectos intrínsecos. A autonomia do objecto geométrico (aqui: superfície) era apenas visada implicitamente; Gauss não o afirmou explicitamente, nem o podia fazer no seu contexto. Como tal, Gauss não se atreveu a formular conceptualmente esta autonomia, pois preferiu aceitar as delimitações da "filosofia euclidiana" da geometria, pelo menos nos seus escritos publicados. Esta restrição apenas permitiu generalizações do pensamento geométrico como analogia, figuração imaginativa, ou metáfora noutros contextos matemáticos.

Isso mudou completamente com Riemann. O seu conceito de variedade foi formado exactamente para transformar figuração imaginativa e metáfora em conceitos estritamente matemáticos de um quadro geométrico generalizado, assim libertando o pensamento geométrico da camisa-de-forças euclidiana. Introduziu o conceito de variedade métrica (*Mannigfaltigkeit mit Massbestimmung*), daquela maneira famosa, através da selecção de uma forma diferencial quadrática positiva determinada,

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j (1 \leq i, j \leq n),$$

a qual o permitiu transferir construções essenciais da teoria das superfícies de Gauss para a geometria generalizada das variedades.

Mais importante a este respeito foi a transferência do conceito de curvatura para as variedades. Na sua comunicação inaugural, Riemann fê-lo introduzindo a *curvatura seccional* de um elemento infinitesimal da superfície, mesmo que apenas com uma descrição do procedimento para o derivar, mas sem dar uma fórmula geral explícita. Isto permitiu-o falar sobre *variedades de curvatura constante* como um elo de ligação entre a teoria geométrica diferencial geral das variedades, e a teoria do espaço físico.

Mencionou dois resultados principais:

1. Variedades de curvatura constante são exactamente aquelas nas quais a livre mobilidade de figuras rígidas é possível.
2. Numa variedade de curvatura constante α, é sempre possível escolher coordenadas locais tais que o sistema métrico seja dado por
3.

$$ds^2 = \frac{\alpha \sum_i dx_i^2}{(1+\frac{\alpha}{4}\sum_i x_i^2)^2}.$$

Menciono o trabalho posterior de Riemann (1861) sobre a propagação do calor num corpo homogéneo apenas de passagem. Aí Riemann introduziu o famoso símbolo de 4 índices em segundas derivadas da métrica como critério da planura de uma variedade métrica (riemanniana), o qual foi posteriormente identificado como um *tensor de curvatura*[6].

Passos em direcção a uma Teoria Topológica das Variedades

Agora quero regressar às distinções básicas de Riemann entre estudos sobre "variedades com métrica" e variedades "independentes de medição" ou *analysis situs.* Já na sua bem conhecida dissertação de doutoramento sobre a teoria das funções complexas (1851), Riemann tinha lidado com questões de analysis situs. Aí tinha introduzido as *superfícies riemannianas* para funções analíticas multi-valoradas numa região complexa e tinha começado a estudar em detalhe a topologia de superfícies compactas orientadas com fronteiras. Tinha usado a *dissecção das superfícies* para componentes com ligações simples, resultando numa classificação completa destas pelo *número de componentes de fronteira* e *ordem da co-relação* (*Ordnung des Zusammenhangs*) m. Esta última tinha sido introduzida por ele como soma alternada do número e para cortes transversais e do número f para componentes de ligação simples

$$m = e - f = -\chi(F), \ [\chi(F) \text{ a característica Euler de F}].$$

Como é claro, um dos argumentos centrais de Riemann nesta passagem foi o de que este número é independente das escolhas específicas do processo de dissecção (1851, 11 e ss.).

Três anos após a sua comunicação inaugural, na sua grande *memória sobre as funções abelianas*, Riemann fez uso de outra abordagem à caracterização da topologia das superfícies, a partir das *relações de fronteira* de sistemas com curvas fechadas no interior da superfície (Riemann, 1857). Desta vez estudou exclusivamente superfícies orientadas fechadas e procurou sistemas de curvas fechadas, os quais formam uma fronteira completa de uma parte da superfície. Nesta relação, introduziu um conceito apropriado de equivalência de sistemas de curvas, e mostrou que o número máximo de curvas fechadas que não constituem uma fronteira completa é independente da escolha específica de curvas, e dá uma boa classificação do género topológico da superfície. Como pôde mostrar que no caso de superfícies (riemannianas) fechadas o número máximo de curvas (cíclicas) fechadas independentes na fronteira é par, foi

[6] Uma investigação recente neste trabalho é dada por [Farwell/Knee 1990].

conduzido ao famoso *invariante numérico 2p* para estas superfícies (*p* foi mais tarde chamado *genus* por Clebsch). E, claro, mostrou como a caracterização do *genus* é traduzida para a "ordem de conectividade" *m* de (1851): pontue-se a superfície fechada [característica de Euler $\chi(F) = 2 - 2p \rightarrow \chi(F') = 1 - 2p$], e obtém-se uma superfície com fronteira para a qual a aplicação do método de dissecção mostra que os cortes transversais $2p$ podem ser usados para dissectar a superfície numa região de conexão simples (1857, 93 e ss.). Portanto, na terminologia de (1851), a ordem de conectividade da superfície puncturada é $m=2p-1$ [a qual de facto é $-\chi(F')$].

Então, se adicionarmos as compreensões de Riemann de (1851) e de (1857) à sua comunicação inaugural, vê-se que ele, no caso bidimensional, de facto deu o primeiro passo em direcção a uma teoria topológica das variedades, contendo os dois aspectos complementares de

— dissecção em células de conexão simples e consideração da característica de Euler no complexo de células;

— caracterização homológica de superfícies fechadas, contado o primeiro número de Betti.

Tudo isto foi discutido, a partir de diferentes pontos de vista, na literatura histórica, tal como o facto de Riemann ter começado a pensar sobre uma generalização dos seus métodos de analysis situs a variedades com mais dimensões [Bollinger 1972, Pont 1974; Scholz 1980, etc.]. Deixou um fragmento do espólio sobre este tópico, onde fez experiências com dissecção e ideias bordistas em variedades a mais dimensões (*Werke*, 479-482).

Devo apenas acrescentar que uma investigação do próprio manuscrito fragmentário (*Riemann*, Espólio **16**, 44^{r}, $46^{r\text{-}v}$, $49^{r\text{-}v}$) apresenta algumas provas circunstanciais de que Riemann trabalhou nestas ideias no período entre a sua dissertação de doutoramento e a sua lição inaugural, não antes nem muito depois de 1857 [Scholz 1982b]. Portanto, podemos ler os fragmentos sobre analysis situs como um enquadramento (escondido) para a curta, e em si bastante vaga, referência de Riemann à topologia das variedades na lição de 1854.

Primeiros Vislumbres de outras Estruturas Geométricas

O próximo ponto que quero discutir é a surpreendente, refinada e diferenciada aproximação ao pensamento geométrico que foi aberta por Riemann, graças ao seu conceito de variedade. Esta visão da geometria estava em linha com as hipóteses mais abrangentes e profundas do pensamento geométrico durante a viragem em direcção à "matemática moderna" dos finais do séc. XIX e do início do séc. XX. Estas mudanças dizem respeito tanto à semântica como à estrutura interna da geometria. Do ponto de vista da semântica, o aspecto mais impressionante no desenvolvimento do séc. XIX é o afastamento em relação às teorias geométricas a partir de referências predominantes, ou mesmo exclusivas, ao espaço físico (ainda se talvez compreendidas num disfarce filosófico *a priori*). Por outro lado, um âmbito de novos campos de referência despertou dentro do próprio conhecimento matemático, particularmente na análise, álgebra e aritmética. Associando-se a este desenvolvimento e como seu resultado, as teorias geométricas tornaram-se mais abstractas e mais diversificadas. E contudo, elas deviam manter-se coesas através de ideias organizadoras centrais.

Para Riemann, a última função foi assumida pelo seu conceito de variedade, o qual admitia diferentes enriquecimentos com ideias estruturais derivadas das situações contextuais. Uma vez mais, foi o seu trabalho teórico sobre funções, onde desenvolveu com mais clareza (se bem que restringido ao caso real bidimensional ou ao caso complexo a uma dimensão) algumas ideias básicas para o estudo das variedades com estruturas que iam além daquelas sobre as quais falou na sua lição de 1854. Mais importante, deste ponto de vista, são as suas investigações sobre *funções abelianas* (1857), as quais contêm ideias extremamente originais sobre superfícies (ou curvas, dependendo do ângulo), do ponto de vista *complexo analítico* e/ou complexo *birracional*.

Este não é o lugar para discutir estas questões em detalhe[7], mas aqui tenho de mencionar duas compreensões gerais e fundamentais de Riemann. A primeira é a sua análise da *estrutura meromórfica* de uma superfície compacta de tipo *p*. Riemann caracterizou os integrais abelianos do segundo tipo através de um conjunto de condições independentes (comportamento dos pólos e parte real dos períodos) usando o último e disputado princípio de Dirichlet. Num segundo passo, derivou uma estimativa do número de funções meromórficas linearmente independentes na superfície com pólos simples em *m* pontos escolhidos tal como

$$\mu \geq m - p + 1.$$

O resultado foi mais tarde afinado pelo seu aluno Roch no *teorema de Riemann-Roch*:

$$\mu = m - p + r + 1,$$

(com r = número de diferenciais abelianos linearmente independentes do primeiro tipo, com zeros nos pontos *m* dados). *Este foi o primeiro resultado da*

[7] Vd., p. ex., [Dieudonné 1974, pp. 42 e ss.; Gray 1989, pp. 361 e ss.; Scholz 1980, 68 e ss.]

geometria moderna a estabelecer uma relação bem fundamentada entre a topologia de uma variedade e uma estrutura mais refinada, neste caso a da analítica complexa numa curva complexa compacta.

O próximo ponto a referir neste contexto é a compreensão de Riemann de que as funções meromórficas numa curva podem de facto ser exprimidas como *funções racionais* em duas delas, digamos z e t, as quais, lidas como coordenadas não-homogéneas em $P(2, \mathbb{C})$, permitem que a curva seja representada algebricamente como

$$F(z,t) = 0, F \in \mathbb{C}[z,t].$$

Isto possibilita, como Riemann claramente afirmou, estudar qualquer curva compacta complexa de um ponto de visa puramente algébrico birracional. Em particular, a mudança de coordenadas de representação (z,t) para (z',t') é dada por transformações racionais em ambas as direcções. Além disso, Riemann indicou o caminho em direcção a uma estrutura puramente algébrica ligada ao seu conceito de variedade. O desenvolvimento destas ideias levaria mais tarde, como é claro, a uma adaptação do conceito subliminar de variedade ao contexto algebraico-geométrico e a uma transformação em diferentes tipos de variedades algébricas. Esta é uma história distante do tempo de Riemann, e mais próxima do presente do que quaisquer outros pontos aqui mencionados[8].

Fundamentos da Geometria

Voltando à lição inaugural, tem de ser dito que Riemann apenas deu breves indicações de que o conceito de variedade podia ser mais desenvolvido do ponto de vista das estruturas analíticas ou mesmo puramente algébricas[9]. O título desta conferência indicava outra linha de investigação, nomeadamente os fundamentos da geometria. Não há dúvida de que após a lição inaugural se ter tornado acessível a um público científico mais vasto com a sua publicação em 1867 (*Göttinger Abhandlungen*), a rápida recepção das ideias geométricas de Riemann foi muitíssimo importante e influente no debate sobre o carácter e a interpretação da *geometria não-*

[8] Vd. [Dieudonné 1974] para uma primeira perspectiva historiográfica.

[9] Contudo, Riemann referiu, de passagem, que "Tais investigações [em analysis situs das variedades, Erhard Scholz] tornaram-se uma necessidade para muitas áreas da matemática nomeadamente para o tratamento de funções analíticas multi-valoradas, e a sua carência é sem dúvida a causa principal de o famoso teorema de Abel e as conquistas de Lagrange, Pfaff, e de Jacobi para a teoria geral das equações diferenciais, permanecerem há tanto tempo infrutíferas." (*Sobre as Hipóteses nas quais a Geometria se Fundamenta*, I.1, p.162 deste dossier).

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência 2: 2011.

euclidiana. Isso é verdade em particular para a influência de Riemann em Beltrami (visível pelo progresso conceptual deste último entre os seus dois escritos de 1868 sobre geometria não-euclidiana), em Helmholtz (ainda que também as ideias de Helmholtz sobre a livre mobilidade como "facto" central no base da geometria tenham sido desenvolvidas antes de ter lido Riemann) e em Clifford, apenas para dar os três exemplos mais proeminentes.

De facto, a abordagem de Riemann, e em particular a sua discussão das variedades de curvatura constante, podem facilmente ser lidas no contexto das investigações de Bolyai e Lobatchevski, pois Riemann esboçou uma sofisticada estrutura conceptual para uma interpretação possível e satisfatória da geometria não-euclidiana. Surpreendentemente, *não há quaisquer indicações de que Riemann tenha conhecido, mais do que superficialmente, o trabalho de Bolyai e Lobatchevski, e talvez mesmo não o tenha conhecido de todo*. Consequentemente não se preocupou com a potencial ligação íntima entre as suas considerações e as deles. Tentarei apresentar os principais argumentos para esta tese, a qual discuti mais em detalhe noutro lugar [Scholz, 1982b].

Pode até ser surpreendente que na lição inaugural de Riemann o único "reformador moderno da geometria" citado pelo nome seja Legendre. Tal ajusta-se à observação de que nunca na sua comunicação (nem em nenhum outro lado) Riemann mencione o axioma das paralelas – nem sequer como um comentário comparável àquele que se refere à teoria topológica das variedades e ao seu papel na teoria das funções complexas. Tal deve parecer desconsolador se se quiser tentar ver uma referência consciente à geometria não-euclidiana no título de Riemann, *Hipóteses nas quais a geometria se fundamenta*. É tanto mais assim quanto as duas últimas secções da segunda parte da exposição (sobre geometria diferencial das variedades) lidam com variedades de curvatura constante, de modo que um comentário sobre o diferente comportamento das paralelas, dependendo da curvatura, teria um óbvio lugar e contexto.

Torna-se ainda mais claro que Riemann nunca se preocupou com as questões fundacionais da geometria no sentido lógico, quando se tem em conta a passagem no seu *Espólio*, a qual foi aparentemente escrita nos anos 1852/1853, ou seja, algum tempo, embora não muito, antes da sua lição inaugural. Neste fragmento anterior a 1854, Riemann ensaiou a ideia de uma variedade e lidou com a relação entre o conceito de variedade e questões fundacionais de geometria[10]. Em particular, assinalou que um tratamento da geometria do ponto de vista das variedades tornaria

[10] Riemann, *Espólio* (**16**, folio $40^{r\text{-}v}$) publicado em [Scholz 1982b, 228-230] com uma correcção de E. Neuenschwander.

supérfluos todos os axiomas de Euclides especificamente geométricos e ofereceria a possibilidade de reduzir os axiomas necessários àqueles que "valem para as quantidades em geral...". Como único exemplo do que poderia ser provado dentro desta estrutura, Riemann cita o axioma 9 de Euclides, o qual estabelece que, dados dois pontos, existe apenas uma linha recta incidente sobre eles. Uma vez mais, o problema das paralelas não é sequer citado.

No que se segue, Riemann afirmou com bastante honestidade o motivo pelo qual estava satisfeito com este simples exemplo e porque não via razão para ir mais longe nestas questões fundacionais:

> Mas mesmo que haja interesse em compreender a possibilidade deste modo de tratar a geometria, a realização deste último seria extremamente estéril, pois deste modo não encontraríamos novos teoremas, e aquilo que parece simples e claro na descrição do espaço, tornar-se-ia por isso complicado e difícil. (Riemann, Espólio, **16**, 40^{r})

Este é um testemunho claro de que Riemann não mostrava muito interesse em estudos detalhados sobre os fundamentos lógicos da geometria, precisamente porque presumia que eles seriam estéreis do ponto de vista de novos teoremas. Esta posição é completamente compreensível do seu ponto de vista, *mas não é sustentável se estivermos familiarizados com os trabalhos de Bolyai e/ou Lobatchevski*. Os estudos deles sobre geometria absoluta e sobre geometria horocíclica no caso não-euclidiano [Gray 1979], para nomear apenas dois exemplos, é demasiado obviamente incompatível com um tal veredicto de "esterilidade".

Por outro lado, Riemann deu uma ideia de porque, em seu entender, o estudo das variedades era *realmente* importante. Na exacta continuação da citação já dada, continua ele:

> Como tal, em todo o lado se enveredou pelo caminho oposto, e cada vez que se encontram variedades a várias dimensões na geometria [matemática?, Erhard Scholz], tal como na doutrina dos integrais definidos na teoria das quantidades imaginárias, toma-se a intuição espacial como um auxílio. É bem sabido como assim se obtém uma perspectiva real do assunto e como, portanto, apenas os pontos precisamente essenciais são enfatizados.

Esta citação concorda inteiramente com a principal linha de raciocínio na lição inaugural de Riemann, naquilo que diz respeito às variedades dentro das matemáticas. Se Riemann tivesse obtido um conhecimento mais profundo dos recentes estudos fundacionais de Bolyai ou Lobatchevski durante o período que mediou a formulação destas observação e a sua lição inaugural, teria tido motivo suficiente para mencionar estes novos e inesperados aspectos. Tal não é, contudo, o caso.

Conceito de Variedade e Espaço Físico

Temos de concluir que as "hipóteses nas quais a geometria se fundamenta" de Riemann têm conotações diferentes das dadas nos finais de 1860 e 1870, quando o debate sobre a geometria não-euclidiana estava no pico. Uma destas outras conotações já foi mencionada. Riemann muito conscienciosamente iniciou a introdução da linguagem geométrica (não-metafórica) noutros domínios matemáticos (teoria das funções complexas, equações diferenciais, etc.) e precisava portanto de novos conceitos fundamentais e "hipóteses" na geometria. Este foi o aspecto puramente matemático do seu empreendimento, mantido em segundo lugar na sua comunicação de 1854.

O *principal marco* da lição inaugural de Riemann, por outro lado, foi a *reformulação dos fundamentos conceptuais da geometria física*. Isto é tornado totalmente claro pela arquitectura da comunicação e pela selecção de tópicos principais, que culminou numa proposta de como podia usar-se o conceito de variedade para analisar mais profundamente as propriedades do espaço físico. Este objectivo ilumina também as razões pelas quais Riemann escolheu variedades de curvatura constante como a única classe de exemplos para um tratamento mais detalhado na sua segunda parte, sobre geometria diferencial.

A intenção de Riemann na última parte da sua lição foi a de esboçar metodologicamente o modo como o conceito de variedade podia ser utilizado para melhorar a compreensão do espaço físico. Logo ao início dessa discussão, ele afirma que, para uma tal aplicação do novo conceito, é essencial saber qualquer coisa sobre condições "suficientes e necessárias para determinar as relações métricas do espaço" (tomando por garantido que o espaço físico pode ser analisado como uma variedade com métrica da geometria diferencial riemanniana). Variedades de curvatura constante tornaram-se importantes neste contexto, pois nesta classe de exemplos tais condições são facilmente caracterizadas.

— Se a livre mobilidade dos corpos rígidos é assumida, a curvatura é constante, e a determinação da soma dos ângulos num triângulo por si só determina a curvatura e a métrica de toda a variedade.

— Se a soma dos ângulos de todos os triângulos é equivalente a dois ângulos rectos, todas as curvaturas seccionais são zero, e o espaço é euclidiano (pelo menos, localmente).

— Se nenhum destes é o caso, a determinação da métrica fica completamente em aberto.

Após um curto excurso pelas questões de ilimitação e infinitude do espaço, as quais o próprio Riemann classificou como, “para a compreensão da natureza, questões inúteis” (müssige Fragen) (1854, p. 172 desde dossier), regressou às relações métricas do espaço. Considerou-as da mais elevada importância, pois “perseguem-se os fenómenos até ao muitíssimo pequeno, a fim de conhecer as conexões causais mútuas, tanto quanto o microscópio queira permitir”. E “é na exactidão com que acompanhamos os fenómenos até ao desmedidamente pequeno que essencialmente se funda o conhecimento das suas conexões causais mútuas” (id.)

Aqui, uma vez mais, discutiu os indícios empíricos existentes, do ponto de vista de uma alternativa teórica. A principal observação referida (sem mencionar nomes), foram as recentes medições astronómicas de Bessel (em 1838) das paralaxes das estrelas fixas, as quais cumpriam os mais elevados padrões técnicos da época e que deram valores positivos para algumas estrelas (mais próximas), mas zero para a maioria delas. Isso constitui boa prova da existência de grandes triângulos de escala astronómica com soma de ângulos π (se se excluírem os casos de curvatura positiva, o que aparentemente Riemann fez sem qualquer aviso). Riemann extraiu então a conhecida conclusão:

— se se assumir a livre mobilidade dos corpos rígidos, então o espaço é euclidiano, com a maior precisão possível disponível à época.
— se, porém, a livre mobilidade não é sustentável, então “a curvatura de todas as porções de espaço mensuráveis não [é] sensivelmente diferente de zero”, deixando em aberto a possibilidade de drásticas alterações da curvatura no pequeno, as quais são neutralizadas se integradas em regiões maiores (1854, ibid.).

Riemann fecha esta passagem com o aviso de que não se deve tomar a geometria euclidiana por garantida, por muito persuasiva que ela possa parecer. O seu argumento chega mesmo, nesta ligação, a lançar dúvidas sobre a aplicabilidade geral do seu próprio conceito métrico e mostra que também os seus próprios recentes conceitos não podem ser considerados como um novo tipo de *a priori* (neo-) kantiano. Fez notar que “…os conceitos empíricos, nos quais se fundam as determinações métricas do espaço (a noção de corpo sólido e a de raio de luz), perdem a sua validade no infinitamente pequeno”. Como tal, deve estar-se sempre aberto a uma revisão dos conceitos fundamentais da geometria (física) “enquanto não se lograr explicar os fenómenos de modo mais simples” (1854, *ibid.*). Esta é, vista à distância, uma observação particularmente impressionante, pois a mudança para uma métrica lorentziana ou semi-riemanniana na relatividade geral e especial foi uma revisão de conceitos fundamentais deste tipo e – para comentar esta observação de Riemann de modo ainda mais anacrónico – algo semelhante está a ser hoje procurado na investigação em curso da estrutura quântica do espaço(-tempo).

Tudo isto mostra claramente o modo como Riemann queria proceder na elaboração das "hipóteses nas quais a geometria (física) se fundamenta". Estas tiveram de ser repensadas e talvez mesmo revisitadas uma e outra vez, com cada indício fundamentalmente novo sobre os instrumentos físicos de medição métrica. Terminou com uma curta observação sobre o papel da matemática neste processo:

> Investigações que, como a que aqui foi perseguida, partem de conceitos gerais, só podem aí ser úteis se ajudarem a preservar esse trabalho de concepções tacanhas, e a resguardar dos preconceitos o progresso no conhecimento das relações mútuas entre as coisas. (1854, p. 173 deste dossier)

Esta observação conduz-nos ao nosso último ponto, a definição filosófica que Riemann dá da função da matemática no conhecimento da realidade física.

A Epistemologia riemanniana das Matemáticas

Riemann não era obviamente nem um empirista, nem um kantiano. Podia, contrastando por exemplo com Gauss, ir facilmente além dos limites restritivos da geometria euclidiana, visto ter desenvolvido uma boa compreensão da filosofia dialéctica alemã pós-kantiana, em particular através dos seus extensos e detalhados estudos da filosofia de Johann Friedrich Herbart (1776-1841). De facto, Herbart tinha defendido uma linha filosófica paralela, a qual era essencialmente realista na sua metodologia e ontologia, sem perder os seus compromissos com a dialéctica na sua epistemologia. Isto aproximou-a mais das linhas de pensamento dos cientistas do que da filosofia idealista alemã convencional da época. Não posso entrar aqui em muitos detalhes[11], mas quero delinear alguns dos aspectos filosóficos subjacentes ao trabalho matemático de Riemann, os quais foram profundamente influenciados por Herbart e, sem dúvida, com uma importância geral maior para o seu trabalho do que apenas a vaga referência às "formas seriais" de Herbart.

Antes de mais, o pano de fundo herbartiano deu a Riemann uma visão pós-kantiana da epistemologia. Herbart, contrastando com os dialécticos idealistas da época, viu o papel do desenvolvimento dialéctico sobretudo na formação de conceitos

[11] Para este assunto, vd. [Scholz 1982a].

e na metodologia do conhecimento. Não era dialéctico, tanto quanto respeita a ontologia. Sabemos, através do espólio de Riemann, que este estudou exactamente, com intensidade e no essencial, concordando, aquelas partes que eram constitutivas na epistemologia de Herbart[12]. Tal formou o enquadramento para o desenvolvimento da própria posição dialéctica de Riemann com respeito à epistemologia, explicitamente afirmada, por exemplo, nos fragmentos filosóficos publicados por Weber nas *Werke* de Riemann (521-525).

Consequentemente, Riemann não partilhava da visão kantiana restritiva de uma única estrutura determinada de conhecimento sintético *a priori*, na qual a matemática, de acordo com Kant, constitui uma parte essencial. Para Riemann não havia lugar para uma dedução das formas transcendentais da cognição puramente *a priori*[13]. Mas, por outro lado, também não sucumbiu às armadilhas do empirismo. O conhecimento teórico, em particular a teoria matemática, na medida em que constitui uma estrutura para o conhecimento científico, tem, de acordo com Riemann, um papel naquilo que quero chamar um *a priori relativo* ou *dialéctico*, com respeito ao conhecimento empírico.

— Este conhecimento é *a priori*, porque nunca pode ser derivado por indução, generalização, ou mesmo idealização directa a partir da experiência. É constituído por uma criação conceptual deliberada e serve como sistema teórico de referência para investigações empíricas e, como tal, tem um papel formativo na cognição do mundo empírico.

— Por outro lado, este conhecimento é *relativo* e *dialéctico*. A sua estrutura não é inteiramente determinada, ou seja, há lugar para escolhas teóricas no processo de geração de conceitos, e estas escolhas são feitas tendo em consideração as provas empíricas disponíveis. Tão pouco é estável no tempo; é sujeito a mudanças durante o processo histórico de refinamento do conhecimento. *Refinamento* (termo de Riemann) pode ser entendido como uma expressão pragmática para um tipo de mudança conceptual que ultrapassa a antiga estrutura sem destruir completamente a validade desta última. Como tal, partilha o aspecto característico da negação dialéctica <*Aufhebung*>, mesmo se apresentada numa linguagem menos elaborada.

---

[12] Riemann, *Espólio* (**16**, 59^v, 64^r, 141^r) – vd. [Scholz 1982a] – e a própria auto-descrição de Riemann: "O autor [Riemann, Erhard Scholz] é herbartiano em psicologia e epistemologia […]; na maior parte dos casos não pode concordar, contudo, com a filosofia natural de Herbart e com as disciplinas metafísicas (ontologia e sinecologia) que a elas se referem." (Riemann, *Werke*, 508)

[13] A tendência anti-kantiana da comunicação de 1854 de Riemann é discutida com maior detalhe por [Nowak 1989].

Ambos os aspectos eram já inerentes à epistemologia de Herbart, mas foram formulados por Riemann nos seus fragmentos epistemológicos como uma sua posição própria[14]. A matemática desempenha, de acordo com Riemann, um papel crítico essencial. Ela deve assegurar que a cognição da realidade "…[é] preserva[ada] […] de concepções tacanhas, e resguarda[da] dos preconceitos […] no conhecimento das relações mútuas entre as coisas.." (citação completa acima). É evidente que para Riemann a função crítica das investigações matemáticas não se restringe a minar a validade dos antigos conceitos, mas estabelece também conceitos novos e mais amplos.

Este ponto de vista permitiu a Riemann conceber uma revisão tão fundamental da estrutura conceptual do espaço físico como a que foi dada na sua lição inaugural. Sabemos que Gauss pensou sobre a necessidade de ir além da perspectiva kantiano-euclidiana, mas que nunca se atreveu emergir com uma tal posição perante o público científico. Riemann conhecia as mudanças que tinham tido lugar no terreno filosófico durante o início do século e usou-as como um sistema de referência positivo para as suas próprias propostas com respeito à geometria física.

Há ainda um ponto a acrescentar. A clara orientação conceptual de Riemann, a qual o levou a enunciar conceitos centrais nas diferentes áreas da matemática sobre as quais trabalhou (variedades em geometria, superfície riemanniana em teoria das funções, o integral de Riemann na teoria da convergência de séries trigonométricas, etc.) estava também muito em linha com o conceito de Herbart de *estudos filosóficos das ciências*. Herbart, sendo um dos filósofos alemães da pedagogia nas primeiras décadas do séc. XIX, tinha visto uma ligação próxima entre filosofia, estudos filosóficos das ciências e um tipo de reforma social que foi promovida pelo estado, porém levada a cabo por uma classe de homens com formação (científica). De forma a preencher uma tal função, as ciências não deviam ser levadas a cabo num estilo predominantemente técnico, mas estudadas no que ele chamou *espírito filosófico*. Isto levou Herbart a postular uma procura continuamente renovada por, e uma elaboração de, conceitos centrais nas diferentes disciplinas científicas. De facto, as ciências deviam organizar-se em torno de *conceitos centrais* <*Hauptbegriffe*> (Herbart 1807). A própria filosofia devia então cultivar as ligações e dissolver possíveis contradições entre os conceitos centrais das diferentes áreas científicas. Por uma tal comunicação,

[14] "…Nos conceitos através dos quais concebemos a natureza, não apenas as nossas percepções são, em cada momento, complementadas, mas também as percepções futuras são descriminadas como necessárias, ou, na medida em que o sistema conceptual não estiver suficientemente completado para esse fim, determinadas como prováveis…" E, um pouco a seguir: "…Os sistemas conceptuais que as subjazem agora [as ciências exactas, Erhard Scholz], foram formadas por mudança gradual de sistemas conceptuais mais antigos, e as razões que resultaram em novos modos de explicação podem ser reduzidas a contradições ou improbabilidades surgidas nas formas mais antigas de explicação." (Riemann, *Werke*, 521)

sistemática mas aberta, entre os estudos filosóficos da ciência e a própria filosofia, ciência e filosofia seriam capazes de satisfazer as suas *Bildungsauftrag*, as suas obrigações educacionais. Riemann tinha estudado intensivamente e extraído estes comentários de Herbart, como sabemos a partir do seu *Espólio* [Scholz 1982ª, p. 424 e ss.]. Isso parece ter-lhe dado uma espécie de espelho para a auto-reflexão sobre a tarefa e o método das matemáticas.

O trabalho matemático de Riemann está penetrado por uma tão profunda orientação conceptual que não pode ser melhor caracterizado do que como "estudo filosófico das matemáticas" no sentido herbartiano. E até se lança alguma luz sobre a relação entre matemáticas e ciências físicas, tais como vistas por Riemann, quando se substitui a matemática pela filosofia na rede herbartiana de comunicações das ciências e da filosofia. De facto, Riemann fez na sua lição inaugural o que os filósofos deviam fazer, de acordo com Herbart, com respeito às disciplinas científicas. Ele investigou o conceito central de variedade, que pode ser encontrado em diferentes ciências matemáticas e físicas, a fim de clarificar as ligações entre as suas diferentes especificações, dissolver possíveis contradições e construiu-o, a fim de assegurar a possibilidade de posteriores progressos no conhecimento científico.

Portanto, encontramos, uma vez mais, uma profunda convergência de ideias entre Herbart e Riemann a este nível metodológico, com referência à mais genérica descrição da tarefa da investigação matemática. Esta convergência conduz-nos à suposição de que Riemann, nas suas investigações matemáticas, tomou, para investigações científicas, orientações que foram desenvolvidas por Herbart, entre outros, a um nível filosófico, e as quais significam uma influência social e cultural mais ampla nas ciências e matemáticas na primeira metade do séc. XIX.

(Tradução de S. Varela Sousa)

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência 2: 2011.

Referências Bibliográficas

[Beltrami, Eugenio 1868a.] Saggio di interpretazione della Geometria non Euclidea. *Giornale di Mathematica* 6, 284-312. Opere 1, 374 - 405.

[Beltrami, Eugenio 1868b.] Teoria fundamentale degli spazi di curvatura costante. *Annali di Mathematica* (2) 2, 232-255. Opere 1, 262-280.

[Bollinger, Maja 1972.] Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffs. *Archive for History of Exact Sciences* 9, 94-170.

[Dieudonné, Jean 1974.] *Cours de géométrie algébrique,* t. 1. Paris: Presses Universitaires de France.

[Farwell, Ruth; Knee, Christopher 1990.] The missing link: Riemann's "Commentatio", differential geometry and topology. *Historia Mathematica* 17, 223-255.

[Gauss, Carl Friedrich 1828.] Disquisitiones generals circa superficies curvas. *Commentationes Societatis Gottingensis,* 99-146. Werke 4, 217-258. Trad. Alemã de A. Wangerin, Leipzig 1900.

[Gauss, Carl Friedrich 1831.] Theoria residuorum biquadraticorum, Comment. secund. *Göttingische gelehrte Anzeigen.* Werke 2 (1863), 169-178.

[Gray, Jeremy J. 1979.] *Ideas of Space. Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic.* Oxford: Clarendon. ^{2}1989.

[Gray, Jeremy J. 1989.] *Algebraic geometry in the late nineteenth century.* In [Rowe/McCleary 1989], 361-388.

[Herbart, Johann Friedrich 1807.] Über philosophisches Studium. Werke 2, 227-296.

[Herbart, Johann Friedrich 1825.] *Psychologie als Wissenschaft, Zweiter analvtischer Theil.,* Werke 6, 1-339.

[Herbart, Johann Friedrich, Werke.] *Sämtliche Werke in chronologischer Reihenfolge.* Hrs. K. Kehrbach; O. Flügel. Langensalza 1899-1912. Reimpresso por Allen: Scientia Verlag 1964.

[Johnson, Dale 1979/1981.] The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology, I, II. *Archive for History of Exact Sciences* 20 (1979), 97-188, 25 (1981), 85-267.

[Johnson, Dale 1987.] L. E. J. Brouwer's coming of age as a topologist. In: E. Phillips (ed.). *Studies in the History of Mathematics.* Mathematics Association of America, Studies in Mathematics 26, 61-97.

[Moore, Gregory H. 1989.] Towards a history of Cantor's continuum problem. In [Rowe/McCleary 1989, 79-121].

[Nowak, Gregory 1989.] Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic *a priori* status of geometry. In [Rowe/McCleary 1989, 17-48].

[Pont, Jean-Claude 1974.] *La topologie algébrique des origines a Poincaré.* Paris: Presses Universitaires de France.

[Riemann, Bernhard 1851.] Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. *Inauguraldissertation* Göttingen. Werke, 3-45.

[Riemann, Bernhard 1854.] Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Habilitationsvortrag Göttingen. *Göttinger Abhandlungen* 13 (1867). Werke, 272-287.

[Riemann, Bernhard 1857.] Theorie der abelschen Funktionen. *Journal für Mathematik* 54. Werke 86-144.

[Riemann, Bernhard 1861.] Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima Academia Parisiensi proposita: "Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini ...". *Werke,* 391-404.

[Riemann, Bernhard, Werke.] *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß.* Leipzig 1876, 2. erweiterte Aufl. 1892. Neudruck New York: Dover 1955. Neudruck Nendeln: Sändig 1978. Erweiterter Neudruck (Hrsg. Narasimhan) Berlin etc.: Springer 1990.

[Riemann, Bernhard, Nachlaß.] *Codex Ms Riemann*, map 16. Handschriftenabteilung, Universitätsbibliothek Göttingen.

[Rowe, David; McCleary, John 1989.] *The History of Modern Mathematics.* vol. 1. Boston etc.: Academic Press.

[Scholz, Erhard 1980.] *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs yon Riemann bis Poincaré.* Basel - Boston - Stuttgart: Birkhäuser.

[Scholz, Erhard 1982a.] Herbart's influence on Bernhard Riemann. *Historia Mathematica* 9, 423-440.

[Scholz, Erhard 1982b.] Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie. *Archive for History of Exact Sciences* 27, 213-282.

[Spivak, Michael 1970.] *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Vol. 2. Boston: Publish or Perish.

Sobre as Hipóteses nas quais a Geometria se Fundamenta[α]

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Plano da Investigação

Sabe-se que a geometria assume tanto o conceito de espaço, como os princípios fundamentais para construir no espaço, como algo previamente adquirido. Ela dá deles apenas definições nominais, ao passo que as determinações fundamentais aparecem sob a forma de axiomas. A relação destes pressupostos permanece portanto na obscuridade; nós não vemos nem se, ou em que medida, a sua ligação é necessária, nem *a priori*, ou se é possível.

De Euclides a Legendre, para nomear os mais famosos geómetras reformadores modernos, esta obscuridade nunca foi esclarecida nem pelos matemáticos, nem pelos filósofos que se ocuparam dela. A razão disso é provavelmente devida ao conceito geral de grandezas de múltipla extensão, dentro do qual estão incluídas as grandezas espaciais, que não foi de todo trabalhado. Por isso, atribuí-me primeiramente a tarefa de construir o conceito de grandeza <*Grössenbegriff*> de múltipla extensão dentro dos conceitos gerais de grandeza. Resulta daí que uma grandeza de múltipla extensão é passível de diferentes relações métricas <*Massverhältnisse*>[1], e que portanto o espaço[2] apenas constitui um caso particular de uma grandeza de tripla extensão. Mas então é necessariamente

[α] Esta Dissertação foi lida pelo autor a 10 de Junho de 1854, e promovida pelo colóquio realizado a propósito da atribuição do grau de Professor na Faculdade de Filosofia de Göttingen. Aqui é explicitada a forma de representação na qual a investigação analítica pode então ganhar sentido; alguns desses resultados [dessas investigações analíticas] encontram-se na resposta [de Riemann] à Academia de Paris [*Preischrift*], nas considerações a eles feitas.

[1] Conceito de tradução difícil numa formulação tão compacta como a que Riemann usa; optou-se por *relações-métricas* (tal como Michael Spivak traduz) em vez de *relações de medida* ou simplesmente *relações-medida* (como William Clifford), sendo que o sentido deve ater-se ao conjunto de relações entre elementos que pode servir de base a uma medição. (N. T.)

[2] O espaço a que Riemann aqui se refere é aquele que é pressuposto pela geometria euclidiana. (N. T.)

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência 2: 2011, 159-175.

consequente que as proposições da geometria não podem ser derivadas de noções gerais de grandeza, mas sim que essas propriedades, através das quais se distingue o espaço de outras grandezas de tripla extensão concebíveis, apenas podem ser retiradas da experiência. Como tal, impõe-se a tarefa de descobrir os mais simples factos <*Thatsachen*> a partir dos quais as relações métricas do espaço se deixam determinar – uma tarefa que, pela natureza do assunto, não está inteiramente determinada; pois talvez haja vários sistemas de factos, os quais são suficientes para determinar as relações métricas do espaço; sendo o mais importante para o presente fim aquele que Euclides deixou como fundamento. Estes factos, tal como todos os factos, não são necessários, mas apenas de certeza empírica, eles são hipóteses; pode-se então investigar a sua probabilidade, a qual dentro dos limites da observação é certamente muito grande, e inquirir sobre a admissibilidade da sua extensão para lá dos limites da observação, tanto pelo lado do desmedidamente[3] grande como pelo lado do desmedidamente pequeno.

I. Conceito de uma grandeza extensiva a *n*-dimensões

Procedendo eu então, antes de mais, na tentativa de encontrar solução para a primeira destas tarefas, o desenvolvimento do conceito de grandeza de múltipla extensão, parece-me que no mínimo posso reclamar alguma indulgência nos juízos críticos, na medida em que sou pouco versado nestes trabalhos de natureza filosófica, onde as dificuldades residem mais nos próprios conceitos do que na construção, e que, para além de umas poucas e breves pistas dadas pelo ilustríssimo Sr. Gauss[4] na sua segunda dissertação sobre resto biquadrático no *Göttingen Gelehrte Anzeige*[5], e na sua Dissertação de Jubileu, e de algumas investigações filosóficas de Herbart, não pude fazer uso de nenhuns trabalhos anteriores.

[3] O termo usado por Riemann é <*Unmessbar*>, *desmedido*, ou seja, aquilo que não é passível de ser mensurado pela dificuldade em atingir o limite do que se deseja medir. Clifford, não se detém nesta subtileza do pensamento de Riemann (naquela que é, a nosso ver, uma das poucas objecções que se pode fazer à sua magnífica tradução) e verte <*Unmessbar*> por <*infinite*>, *infinito*, o que, além de conotar a expressão do autor com um conceito matematicamente complexo (o de infinito), vai também contra o espírito das abundantes considerações métricas de Riemann e até, em certa medida, contradiz a ideia da última secção desta dissertação. Riemann não afirma que o grande ou o pequeno têm uma grandeza infinita – no sentido em que não conhece termo –, afirma sim que a nós humanos não é dado *medir* essa grandeza, por falta de instrumentos e por incapacidade racional de a conceber até ao limite; a determinação é de ordem *relacional* e não *ontológica*. Spivak também prefere a tradução do termo por <*immeasurable*>. (N. T.)

[4] No original, Riemann refere um dos muitos títulos honoríficos concedidos a Gauss em vida, o de *Geheimen Hofrath*, que omitimos, pois para ele não existe propriamente um grau equivalente em português (o mais aproximado seria, por exemplo, o de *Conselheiro de Estado*). (N.T.)

[5] C. F. Gauss, *Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio secunda*, Göttingen, 1832. (N. T.)

1.

Conceitos de grandeza são apenas possíveis onde se encontra um conceito geral antecedente, o qual permite diferentes determinações específicas. Conforme existe, ou não existe, entre estas determinações específicas uma passagem contínua de uma para outra, elas formam uma variedade contínua ou discreta; as determinações específicas individuais denominam-se no primeiro caso pontos e no segundo elementos desta variedade. Conceitos cujas determinações específicas formam uma variedade discreta são tão frequentes que, dados quaisquer objectos, é sempre possível encontrar nas línguas cultivadas pelo menos um conceito no qual elas estão contidas (e os matemáticos podem por isso, com segurança, extrair da teoria das grandezas discretas o postulado de que certos objectos dados são considerados equivalentes), por outro lado, as ocasiões para formar conceitos cujas determinações específicas constituem uma variedade contínua são tão escassas na vida quotidiana, que é bem possível que as posições dos objectos percepcionados <*Sinnengegenstände*> e as cores sejam os únicos conceitos simples cujas determinações específicas formam uma variedade de múltipla extensão. Encontram-se na matemática avançada ocasiões mais frequentes para a criação e desenvolvimento destes conceitos.

Determinações, através das quais se distingue uma região de uma variedade por uma característica ou por um limite, são chamadas Quanta. A comparação da sua quantidade <*Quantität*> é obtida pela enumeração no caso das grandezas discretas, pela medição no caso das contínuas. A medição consiste na sobreposição das grandezas a comparar; para a medição é preciso então um recurso que consiste no uso de uma grandeza como escala para medir a outra. Faltando isto, só se podem comparar duas grandezas quando uma é parte da outra, e aí apenas o mais ou o menos, mas não decidir sobre o quanto. As investigações, que neste caso se podem empreender sobre elas [as grandezas], configuram uma divisão geral autónoma da teoria da grandeza, na qual as grandezas são consideradas, não como existindo independentemente da posição, e não como sendo exprimíveis através de uma unidade, mas como regiões numa variedade. Tais investigações tornaram-se uma necessidade para muitas áreas da matemática nomeadamente para o tratamento de funções analíticas multi-valoradas, e a sua carência é sem dúvida a causa principal de o famoso teorema de Abel e as conquistas de Lagrange, Pfaff, e de Jacobi para a teoria geral das equações diferenciais, permanecerem há tanto tempo infrutíferas. Para o presente propósito, esta secção geral da teoria da grandeza extensa, na qual nada é assumido senão aquilo que está contido no seu conceito, é suficiente destacar dois pontos, dos quais o primeiro se relaciona com a construção do conceito de variedade de múltipla extensão, o segundo com a redução das determinações da posição <*Ortsbestimmung*> numa variedade dada às determinações quantitativas <*Quantitätsbestimmung*>[6], e tornará clara a verdadeira característica <*Kennzeichen*> de uma extensão a *n*-dimensões.

2.

Se se passar, através de um conceito dado cujas determinações específicas <*Bestimmungweise*> formam uma variedade contínua, de uma determinação específica para uma outra, então as determinações específicas transpostas formam uma variedade de extensão simples, cuja característica essencial é a de que a progressão contínua de um ponto é possível apenas para dois lados, para a frente ou para trás. Suponha-se agora que esta variedade transita por sua vez para uma outra completamente diferente, e com efeito outra vez de um modo determinado, designadamente, que cada ponto de uma transita para um ponto determinado da outra, formando então assim o conjunto de todas as determinações específicas obtidas uma variedade extensiva a duas-dimensões. Da mesma maneira, obtém-se uma variedade extensiva a três-dimensões, se for imaginada uma com extensão a duas-dimensões transitando de forma determinada para outra completamente diferente, e é bom de ver como esta construção pode ser continuada. Quando, em vez de tomarmos o conceito como determinante, atentamos no objecto como variável, esta construção pode então ser descrita como um conjunto de variedade <*Veränderlichkeit*> a $n + 1$ dimensões, como uma variedade a n dimensões e como uma variedade a uma dimensão.

3.

Mostrarei agora, inversamente, como se pode decompor uma variedade <*Veränderlichkeit*> cuja região é dada, numa variedade a uma dimensão, e numa variedade a menos dimensões. Para este fim, suponha-se uma porção variável de uma variedade <*Mannigfaltigkeit*> a uma dimensão – calculada a partir de um ponto de origem fixo <*Anfangspunkt*>, de modo a que os seus valores possam ser comparados com os de uma outra – a qual, para cada ponto da variedade dada, tem um valor determinado que varia com ele, ou por outras palavras, tome-se uma função contínua

[6] A nosso ver, a tradução de <*Quantitätsbestimmung*> por *determinação numérica* <*numerical determination*>, como faz Spivak, é excessiva. (N. T.)

da posição dentro da variedade dada, mais precisamente uma tal função que não seja constante ao longo de uma qualquer região dessa variedade. Todo o sistema de pontos, onde a função tem um valor constante, forma então uma variedade contínua a menos dimensões do que a que foi dada. Estas variedades transitam continuamente de uma para a outra conforme a função muda; podemos consequentemente assumir que, fora de uma delas, as outras prosseguem e, tomado na generalidade, isto pode acontecer de tal maneira que cada ponto transita para um ponto determinado na outra; os casos excepcionais, cuja investigação é importante, não carecem aqui de consideração. Por este meio, a determinação da posição na variedade dada é reduzida à determinação da grandeza e à determinação da posição numa variedade a menos dimensões. Agora é então fácil mostrar que esta variedade é a $n - 1$ dimensões, quando a variedade dada é uma extensão a n-dimensões. Repetindo este processo n vezes, a determinação da posição numa variedade de extensão a n-dimensões é então reduzida a n determinações da grandeza, e como tal a determinação da posição numa dada variedade, quando isso é possível, é reduzida a um número finito de determinações quantitativas. Há variedades nas quais a determinação da posição não requer um número finito, mas ou uma série infinita ou uma variedade contínua de determinações da grandeza. Tais variedades formam, por exemplo, as possíveis determinações de uma função para uma dada região, as formas possíveis de uma figura no espaço, e por aí fora.

II. Relações métricas de que uma variedade a *n*-dimensões é passível, de acordo com a pressuposição de que as linhas possuem um comprimento independente da posição, e de que consequentemente cada linha é mensurável a partir de outra

Resulta então, uma vez que se construiu o conceito de uma variedade extensiva a n-dimensões, e que a característica fundamental que nele pode ser descoberta consiste na propriedade de que a determinação da posição deixa-se nela reduzir a n determinações de grandeza, voltarmo-nos para a segunda das tarefas acima propostas, [a saber,] a investigação das relações métricas de que uma tal variedade é passível, e das condições suficientes para determiná-las. Estas relações métricas deixam-se investigar apenas por meio de conceitos de grandeza abstractos e as suas relações mútuas[7] só são representáveis por fórmulas; em certas pressuposições, elas podem contudo ser decompostas em relações, as quais tomadas isoladamente, são

[7] Spivak opta por *interdependência* (em vez de *relação mútua*, ou *conjunto*, ou *nexo*) para traduzir <*Zusammenhange*> escolha que clarifica bastante este passo; optamos porém por esta tradução para a harmonizar com a tradução do mesmo termo na terceira secção do texto. (N. T.)

passíveis de representação geométrica, e assim torna-se possível exprimir geometricamente os resultados do cálculo. Por isso, para alcançar terreno firme, na verdade não se podem evitar considerações abstractas nas fórmulas, porém esses mesmos resultados podem ser apresentados numa forma geométrica. Para ambos, os fundamentos estão estabelecidos na célebre dissertação sobre as superfícies curvas[8] do ilustríssimo[9] Sr. Gauss.

1.

Determinações de medida requerem uma autonomia da grandeza face à posição, que pode ocorrer de mais de uma maneira; a que primeiramente se apresenta, e a qual aqui quero perseguir, é aquela de acordo com a qual o comprimento <*Länge*> das linhas é independente da sua posição <*Lage*>[10], e como tal cada linha é mensurável por meio de qualquer outra. Seja a determinação da posição reduzida à determinação da grandeza, e como tal a posição de um ponto exprimida, na variedade extensiva a *n*-dimensões, através de *n* grandezas variáveis x_1, x_2, x_3, e por aí fora até x_n, segue-se daí, quanto à determinação de uma linha, que as grandezas *x* serão dadas como funções de uma variável. A tarefa é então a de estabelecer uma expressão matemática para o comprimento das linhas, para cujo fim se devem considerar as grandezas *x* como exprimíveis em unidades. Darei conta desta tarefa apenas segundo certas restrições, e restringir-me-ei primeiramente a estas linhas, nas quais as relações[11] das grandezas *dx* – a variação conjunta com a grandeza *x* – variam continuamente; podemos então conceber estas linhas como decompostas em elementos, dentro dos quais as relações das grandezas *dx* podem ser observadas como constantes, e segue-se então que a tarefa é pois reduzida ao estabelecimento, para cada ponto, de uma expressão geral para os elementos lineares <*Linienelements*> *ds* que nele começam, a qual irá portanto conter as grandezas *x* e as grandezas *dx*. Irei supor apenas, em segundo lugar, que o comprimento do elemento linear, abstraindo de grandezas de segunda ordem, permanece inalterado quando todos os mesmos pontos sofrem um deslocamento infinitesimal, o que implica simultaneamente que se todas as grandezas *dx* aumentam na mesma relação, o elemento linear varia também na mesma relação. De acordo com estas suposições, o elemento linear pode ser

---

[8] C. F. Gauss, *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*, Göttingen, 1827. (N. T.)
[9] Vd. supra nota 4.
[10] Spivak faz uma tradução muito interpretativa do termo <*Lage*> quando aplicado às linhas, ou seja, traduz <*Lage*> por <*configuration*>, *configuração*, e não por *posição* ou *situação*.
[11] Tanto Clifford como Spivak optam por, neste passo, traduzir <*Verhältnisse*> (*relações*) por *rácios* (*ratios*, que adiante traduziremos também por *razões*), o que nos parece uma escolha muitíssimo adequada, tendo em conta o que imediatamente a seguir Riemann acrescenta em aposto. (N. T.)

qualquer função homogénea do primeiro grau das grandezas *dx*, que permanece inalterada quando alteramos todos esses mesmos sinais das grandezas *dx*, e na qual as constantes arbitrárias são funções contínuas das grandezas *x*. Para encontrar os casos mais simples, procurarei primeiro uma expressão para as variedades extensivas a (*n* – 1) dimensões, as quais são sempre em todo o lado equidistantes ao ponto de origem do elemento linear, ou seja, encontrarei uma função contínua de posição, que se distinga de outras. Saindo para fora do ponto de origem, esta tem, em todas as direcções, ou de diminuir, ou de aumentar; eu quero assumir que ela aumenta em todas as direcções e consequentemente, tem o seu mínimo nesse ponto de origem. Então, quando o seu primeiro e segundo coeficientes diferenciais são finitos, o seu diferencial de primeira ordem deve desaparecer, e o diferencial de segunda ordem não deve poder tornar-se negativo; eu assumo que ele permanece sempre positivo. Esta expressão diferencial de segunda ordem permanece então constante, quando *ds* permanece constante, e cresce na razão quadrada quando a grandeza *dx*, e logo também a *ds*, crescem na mesma razão; é então igual à constante.ds^2 [a constante multiplicada por ds^2] e consequentemente *ds* = raiz quadrada de uma função homogénea integral sempre positiva do segundo grau para as grandezas *ds*, nas quais os coeficientes são funções contínuas das grandezas *x*. Para o espaço, quando se expressa a posição dos pontos através de coordenadas rectilíneas, *ds* = $\sqrt{\sum(dx)^2}$; o espaço é então incluído neste caso mais simples. O próximo caso, em simplicidade, inclui essas variedades nas quais o elemento linear pode ser expresso através da quarta raiz de uma expressão diferencial do quarto grau. A investigação deste tipo mais geral não requereria princípios diferentes, mas tomaria um tempo considerável e, em proporção ao esforço, pouca luz lançaria sobre a teoria do espaço, especialmente tendo em conta que os resultados não se deixam exprimir geometricamente; consequentemente, restrinjo-me às variedades nas quais o elemento linear é expresso através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau. Podemos transformar uma tal expressão noutra similar, se tomarmos as funções variáveis *n* independentes por novas variáveis *n* independentes. Nesta medida não se pode portanto transformar qualquer expressão numa outra; pois a expressão contém $n\frac{n+1}{2}$ coeficientes, os quais são funções arbitrárias das variáveis independentes; através da introdução de novas variáveis só se podem satisfazer *n* relações, e como tal tornar iguais apenas *n* dos coeficientes para as grandezas dadas. Os restantes $n\frac{n-1}{2}$ [12] são então inteiramente determinados através da natureza do contínuo a representar, e portanto requerem-se funções de posição $n\frac{n-1}{2}$ para a determinação das suas relações

[12] Notação em Ewald: $\frac{1}{2}n(n-1)$. (N. T.)

métricas. Variedades nas quais o elemento linear se deixe reduzir à forma $\sqrt{\sum dx^2}$, como no Plano e no Espaço, constituem portanto apenas um caso particular das variedades a investigar aqui; elas merecem um nome particular, e como tal eu quero chamar planas a estas variedades nas quais o quadrado do elemento linear se deixa representar como a soma de diferenciais integrais. Para que se conheçam todas as diferenças fundamentais com a forma representável pressuposta na variedade, é necessário eliminar as dificuldades que emanam do modo como a representamos, o que será alcançado se escolhermos as grandezas variáveis de acordo com um princípio determinado.

2.

Para esse fim, pense-se no sistema das linhas mais curtas[13] que se pode construir a partir de um qualquer ponto dado; a posição de um ponto indeterminado pode então ser determinada através da direcção inicial <*Anfangsrichtung*> das linhas mais curtas nas quais ele se encontra, e através da distância destas ao ponto de origem, e pode, por isso, ser expressa através das relações das grandezas dx^0 [14], isto é, das grandezas dx na origem destas linhas mais curtas e através do comprimento s desta linha. Estamos agora então em condições de, em vez de dx^0, estabelecer $d\alpha$ como as suas funções lineares, onde o valor inicial do quadrado do elemento linear equivale à soma dos quadrados destas expressões, de tal modo que as variáveis independentes são: a grandeza s e as razões das grandezas $d\alpha$; e finalmente em vez de tomar $d\alpha$ como as grandezas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que lhes são proporcionais, tomá-las como as somas dos seus quadrados = s^2. Introduzindo estas grandezas, o quadrado do elemento linear torna-se $=\sum dx^2$ para valores infinitesimais de x, sendo contudo o membro da ordem seguinte igual a uma função homogénea de segundo grau das grandezas $n\frac{n-1}{2}$ $(x_1\ dx_2 - x_2\ dx_1)$, $(x_1\ dx_3 - x_3\ dx_1)$..., portanto, uma grandeza infinitesimal da quarta dimensão, de tal modo que obtemos uma grandeza finita quando a dividimos pelo quadrado do triângulo infinitesimal, para cujos vértices os valores são $(0,0,0,\ldots)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \ldots)$. Esta grandeza mantém o mesmo valor, desde que as grandezas x e as dx estejam incluídas na mesma forma linear binária, ou desde que as duas linhas mais curtas do valor 0 ao valor x e do valor 0 ao valor dx permaneçam no mesmo elemento da superfície <*Flächenelement*>, e se encontrem portanto no mesmo lugar e na mesma direcção <*Richtung*>. Será

[13] Após esta ocorrência, Clifford vai sempre optar por traduzir a expressão <*kürzestes Linien*>, *as linhas mais curtas* por <*geodesics*>, *geodésicos*; embora em geometria a distância mais curta entre dois pontos seja denominada *geodésico*, não é esse o termo que o autor usa; portanto, e embora fosse muito mais confortável usá-lo, optámos por ser fiéis à letra do texto. (N. T.)

[14] Notação em Ewald: dx_0. (N. T.)

obviamente = 0 quando a variedade mostrada é plana <*eben*>, isto é, quando o quadrado do elemento linear é redutível a $\sum dx^2$, e pode portanto ser vista como a medida do desvio <*Abweichung*> que, no ponto dado, a variedade tem da planura <*Ebenheit*>, na direcção da superfície <*Flächenrichtung*> dada. Multiplicada por $-\frac{3}{4}$ a grandeza torna-se equivalente ao que o ilustríssimo[15] Sr. Gauss designou por medida da curvatura <*Krümmungsmass*> de uma superfície. Para determinar as relações métricas de uma variedade extensiva a n-dimensões representável na forma assumida, acabámos de descobrir que são necessárias as funções de posição $n\frac{n-1}{2}$; se, portanto, for dada a medida da curvatura em cada ponto $n\frac{n-1}{2}$ das direcções da superfície, então as relações métricas da variedade deixam-se determinar a partir daí, desde que entre estes valores não ocorra nenhuma relação idêntica, o que de facto, e de uma maneira geral, não é o caso. As relações métricas desta variedade, cujo elemento linear pode ser exprimido através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau, deixam-se exprimir de modo inteiramente independente da escolha da grandeza variável. Um método completamente semelhante pode, para esta finalidade, também ser adoptado para as variedades nas quais o elemento linear tem uma expressão menos simples, por exemplo, através da quarta raiz de uma expressão diferencial do quarto grau. De uma maneira geral, neste caso o elemento linear já não é redutível à forma da raiz quadrada de uma soma de quadrados de uma expressão diferencial, e assim, na expressão do quadrado do elemento linear, o desvio em relação à planura é uma grandeza infinitesimal da segunda dimensão, ao passo que para essas variedades era uma grandeza infinitesimal da quarta dimensão. Esta propriedade destas últimas variedades pode então perfeitamente ser chamada de planura das partes mais pequenas. Para o presente propósito, a propriedade mais importante destas variedades, e por cuja razão são aqui unicamente investigadas, é a de que as relações das extensões[16] a duas dimensões podem ser geometricamente representadas através de superfícies, e as extensões a mais dimensões deixam-se determinar pelas propriedades das superfícies neles contidas, o que pede agora uma outra curta discussão.

3.

À concepção de superfícies misturam-se as suas relações métricas, nas quais é tido em consideração não apenas o comprimento das distâncias nelas contidas, mas também a posição dos pontos localizados fora dela. Pode porém abstrair-se de relações externas se considerarmos que estas não deformam o comprimento das

[15] Vd. supra nota 4.
[16] Clifford traduz <*ausgedehnten*> exactamente pelo termo geométrico, *contínuos* (<*continua*>). (N. T.)

linhas, o qual permanece inalterado, isto é, se as pensarmos curvadas – mas sem distensão <*Dehnung*> – e considerarmos todas as superfícies então resultantes como equivalentes. Assim também, por exemplo, qualquer superfície cilíndrica ou cónica é equivalente a um plano, pois ela deixa-se produzir a partir de um, simplesmente dobrando-o, no qual as relações métricas intrínsecas, todos os teoremas sobre elas – bem como toda a planimetria – conservam a sua validade; por outro lado, são essencialmente diferentes da esfera, a qual não pode ser convertida num plano sem ser distendida. Das anteriores investigações resultou que, em cada ponto, as relações métricas intrínsecas de uma grandeza extensiva a duas dimensões, quando o elemento linear se deixa exprimir através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau, como é o caso das superfícies, caracterizam-se pela curvatura. Quanto às superfícies, esta grandeza apresenta-se pois à interpretação intuitiva enquanto produto das duas curvaturas da superfície neste ponto, ou então como o seu produto por um triângulo infinitamente pequeno formado pelas linhas mais curtas, sendo, proporcionalmente ao rádio, metade do excesso da soma dos seus ângulos sobre dois ângulos rectos. A primeira definição pressupõe a proposição de acordo com a qual o produto dos dois rádios das curvaturas permanece inalterado se a superfície simplesmente for encurvada, a segunda, pressupõe que num mesmo ponto, o excesso da soma dos ângulos de um triângulo infinitesimal sobre dois rectos é proporcional à sua área. Para dar uma interpretação tangível à curvatura de uma variedade extensiva a *n*-dimensões, num dado ponto, e através de uma dada direcção da superfície, temos de partir daí, do facto de que a linha mais curta procedente de um ponto fica inteiramente determinada quando a sua direcção inicial é dada. Assim sendo, obtém-se uma superfície determinada quando se estendem todas as linhas mais curtas [na superfície] que partem do ponto dado e que procedem a partir da direcção inicial, e esta superfície tem, no ponto dado, uma curvatura determinada, a qual é também a curvatura da variedade extensiva a *n*-dimensões no ponto dado, na direcção da superfície dada.

4.

Agora, ainda antes de fazermos a aplicação ao espaço, algumas considerações sobre essas variedades planas em geral são necessárias, isto é, sobre aquelas nas quais o quadrado do elemento linear é exprimível através da soma de quadrados de diferenciais integrais.

Numa variedade extensiva plana a *n*-dimensões a curvatura em todos os pontos, em todas as direcções, é zero; podem contudo ampliar-se as anteriores investigações se se souber que, para determinar relações métricas, em cada ponto $n\frac{n-1}{2}$ na direcção da superfície a sua curvatura é independente [da de outros pontos] e é igual a zero. As variedades cuja curvatura é em todo o lado = 0 podem ser tratadas como um caso especial entre as variedades cuja curvatura é constante. O carácter comum destas variedades, cuja curvatura é constante, pode também ser expresso como as figuras podendo percorrê-las sem ser distendidas <*ohne Dehnung*>. Pois, obviamente, as figuras não podiam ser nelas arbitrariamente movidas e rodadas caso a curvatura não fosse a mesma em cada ponto, em cada direcção. Por outro lado, é através da curvatura que as relações métricas da variedade são completamente determinadas; por consequência, elas são, num ponto como noutro, exactamente as mesmas relações métricas em todas as direcções, e também as mesmas construções são exequíveis a partir delas, donde se segue que, nas variedades com curvatura constante, pode ser atribuída às figuras uma posição arbitrária. As relações métricas destas variedades dependem apenas do valor da curvatura, e em relação com a representação analítica pode notar-se que, quando se designa este valor por α, à expressão para o elemento linear pode ser dada a forma[17]

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}$$

5.

A consideração sobre as *superfícies* de curvatura constante pode servir para exposição geométrica. É bom de ver que a superfície cuja curvatura é positiva se deixa enrolar de modo a tornar-se uma esfera com rádio igual a 1 dividido pela raiz quadrada da curvatura; para contemplar todas as variedades com estas superfícies, imagine-se uma delas que tem a forma de uma esfera e as outras tendo a forma de superfícies de revolução <*Umdrehungsflächen*> que a tocam ao longo do equador. As superfícies com curvatura maior que a desta esfera tocarão a esfera no interior, e assumirão uma forma como a da região da superfície de um anel, exterior ao eixo; elas podem ser convertidas em zonas de esferas com rádios inferiores, mas contornarão a figura mais do que uma vez. As superfícies com menor curvatura positiva são obtidas a partir de superfícies esféricas com rádios maiores, cortando a lúnula <*begrenztes Stück*> que limita um dos dois grandes semi-círculos e juntando as

[17] Notação em Ewald: $\frac{1}{1+\frac{1}{4}\alpha\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}$. (N.T.)

linhas de intersecção seccionadas. A superfície com curvatura zero será um cilindro sobre o equador; as superfícies com curvatura negativa tocarão o cilindro externamente e serão formadas como a zona interior da superfície de um anel voltada para o eixo. Se pensarmos estas superfícies como o lugar <*Ort*> onde pode haver regiões da superfície que se deslocam, tal como o espaço é o lugar para os corpos, então nestas superfícies pode haver movimento de regiões da superfície sem que elas sejam distendidas. As superfícies com curvatura positiva podem ser sempre formadas assim, de modo que as regiões das superfícies <*Flächenstücke*> podem também ser movidas arbitrariamente sobre elas sem flexão <*Biegung*>, nomeadamente sobre superfícies esféricas, mas as com curvatura negativa não. Para lá desta independência da posição <*Ort*> em relação às regiões da superfície, encontramos também nas superfícies de curvatura zero uma independência da direcção em relação à posição, a qual não constatamos nas restantes superfícies.

III. Aplicação ao Espaço

1.

De acordo com estas investigações sobre a determinação das relações métricas de uma variedade com grandeza extensiva a *n*-dimensões, podem prescrever-se as condições que são suficientes e necessárias para determinar as relações métricas do espaço desde que haja independência da linha em relação à sua posição[18] e a expressão do elemento linear for feita através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau, isto é, se as regiões mais pequenas forem planas.

Primeiro, elas deixam-se exprimir assim, a curvatura é em cada ponto, em três direcções da superfície, = 0, e é a partir daí que se determinam as propriedades métricas do espaço, quando a soma dos ângulos de um triângulo é, em todo o lado <*allenthalben*>, igual a dois rectos.

Tal como *Euclides*, estabeleça-se no entanto, em segundo lugar, não apenas uma existência das linhas independente da posição, mas também de corpos, seguindo-se então que a curvatura é em todo o lado constante, e então, em todos os triângulos, a soma dos ângulos é determinada quando um dos ângulos está determinado.

Em terceiro e finalmente, pode, em vez de tomar o comprimento das linhas como independente da posição <*Ort*> e da direcção, assumir-se também que o seu comprimento e direcção são independentes em relação à posição <*Lage*>. Por meio desta concepção, mudanças <*Ortsänderungen*> ou diferenças de posição

[18] Vide supra, nota 10.

<*Ortsverschiedenheiten*> são grandezas complexas exprimíveis em três unidades independentes.

2.

No curso das anteriores investigações, distinguiram-se primeiro as relações de extensão <*Ausdehnungsverhältnisse*> ou localização <*Gebietsverhältnisse*> das relações métricas, e descobriu-se que com as mesmas relações de extensão eram concebíveis diferentes relações métricas; procurou-se então o sistema de determinação de grandezas simples, através do qual as relações de grandeza do espaço são completamente determinadas e através das quais todas as proposições sobre elas resultam necessariamente; resta pois discutir a questão de como, em que grau, e com que amplitude, estas pressuposições são fornecidas pela experiência. Nesta afinidade, encontramos uma diferença essencial entre as simples relações de extensão e as relações de grandeza, na medida em que na primeira, onde os casos possíveis formam uma variedade discreta, as afirmações da experiência não são na verdade completamente seguras, mas também não são imprecisas, ao passo que na última, na qual os casos possíveis formam uma variedade contínua, toda a determinação proveniente da experiência permanece sempre imprecisa – o que faz da probabilidade, senão quase certa, ainda assim bem alta. Esta consideração torna-se importante se estas determinações empíricas forem estendidas para lá dos limites da observação, ao desmedidamente grande e ao desmedidamente pequeno; pois a última pode, fora dos limites da observação, tornar-se sempre mais imprecisa, mas a primeira nem tanto.

Na extensão da construção sobre o espaço ao desmedidamente grande há que distinguir entre ilimitação <*Unbegrenztheit*> e infinitude <*Unendlichkeit*>; a primeira pertence às relações de extensão, esta às relações métricas. Que o espaço seja uma variedade extensiva ilimitada a três-dimensões é uma pressuposição que é apoiada por toda a concepção do mundo exterior, de acordo com a qual a área da percepção real é constantemente completada e as possíveis posições de um objecto procurado são construídas, e a qual, através destas aplicações, incessantemente a si mesmo se corrobora. A ilimitação do espaço possui portanto uma certeza empírica maior que qualquer outra experiência externa. Mas daqui não se extrai a infinitude de modo nenhum; antes, quando se pressupõe a independência dos corpos em relação à posição, e também prescrevemos ao espaço uma curvatura constante, este é necessariamente finito, conquanto esta curvatura tenha pelo menos um pequeno elemento positivo. Devia obter-se, se partindo de uma direcção se prolongarem todas as linhas mais curtas num elemento da superfície, uma superfície ilimitada de curvatura positiva constante, isto é, obter uma superfície que numa variedade extensiva plana a três-dimensões assumiria a forma de uma superfície esférica, a qual seria consequentemente finita.

3.

As questões sobre o desmedidamente grande são, para a compreensão da natureza, questões inúteis. Diferentemente sucede com as questões sobre o desmedidamente pequeno. É na exactidão com que acompanhamos os fenómenos até ao desmedidamente pequeno que essencialmente se funda o conhecimento das suas conexões causais mútuas <*Causalzusammenhang*>. O progresso dos séculos recentes no conhecimento da mecânica da natureza foi quase apenas devido à exactidão da construção, possível através da invenção da análise do infinito, e dos princípios simples descobertos por *Arquimedes*, *Galileu* e *Newton*, os quais são usados pela física contemporânea. Contudo, nas ciências naturais, as quais estão até agora carentes desses princípios simples para tais construções, perseguem-se os fenómenos até ao muitíssimo pequeno, a fim de conhecer as conexões causais mútuas, tanto quanto o microscópio queira permitir. Questões sobre as relações métricas do espaço no desmedidamente pequeno não são então questões inúteis.

Se desde logo se estabelecer o enunciado de que os corpos existem independentemente da posição, então a curvatura é em todo o lado constante, e então resulta das medições astronómicas que não pode ser diferente de zero; de qualquer modo, o seu elemento recíproco tem de ser uma superfície, a qual, em relação à área acessível aos nossos telescópios, pode ser descurada. Mas quando não existe uma tal independência dos corpos em relação à posição, não se podem tirar conclusões das relações métricas do grande para o infinitamente pequeno; é possível então que a curvatura em cada ponto, em três direcções, possa ter qualquer valor, bastando apenas que a curvatura de todas as porções de espaço <*Raumtheils*> mensuráveis não seja sensivelmente diferente de zero; podem ainda surgir relações mais complicadas quando não existe uma suposta representação dos elementos lineares através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau. Ora, parece contudo que os conceitos empíricos, nos quais se fundam as determinações métricas do espaço (a noção de corpo sólido e a de raio de luz), perdem a sua validade no infinitamente pequeno <*Unendlichklein*>[19]; é então muito plausível que as relações métricas do espaço no infinitamente pequeno não sejam conformes com as proposições

[19] Repare-se nas três ocorrências seguintes, a nosso ver nada negligenciáveis, do termo <*Unendlichklein*> em lugar de <*Unmessbarklein*>.

fundamentais da geometria, e é-se de facto obrigado a aceitar isto enquanto não se lograr explicar os fenómenos de modo mais simples.

A questão da validade das proposições fundamentais da geometria no infinitamente pequeno aparece ligada à questão do mais profundo fundamento das relações métricas do espaço. Nesta última questão, que pode muito bem ainda ser considerada como relativa à doutrina do espaço, aparece a aplicação da observação feita acima, que numa variedade discreta o princípio das relações métricas está contido no próprio conceito destas variedades, mas, diferentemente, numa contínua tem de vir de fora. É então forçoso que ou os fundamentos da realidade sobre os quais o espaço repousa formem uma variedade discreta, ou então procurar os fundamentos das relações de medida fora dele, nas forças que sobre ele actuam e que ligam os seus elementos.

O veredicto para estas perguntas pode apenas ser encontrado partindo da concepção dos fenómenos que a experiência deu como provados, e para os quais *Newton* estabeleceu os fundamentos, e isto por meio de factos fundamentais que, se ela [a concepção dos fenómenos] não consegue explicar, deve procurar afinar gradualmente; tais investigações que, como a que aqui foi perseguida, partem de conceitos gerais, só podem aí ser úteis se ajudarem a preservar esse trabalho de concepções tacanhas, e a resguardar dos preconceitos o progresso no conhecimento das relações mútuas entre as coisas.

Isso conduz ao domínio de uma outra ciência, ao domínio da física, no qual a natureza da comunicação de hoje não nos permite certamente entrar.

Sumário

Plano da Investigação

I. Conceito de uma grandeza extensiva a *n*-dimensões.

§1. Variedades discretas e contínuas. Regiões determinadas de uma variedade chamam-se Quanta. Classificação da teoria da grandeza contínua nas teorias

1) das simples relações entre regiões, nas quais não é pressuposta uma independência das grandezas em relação à posição,

2) das relações de grandeza, nas quais tem de ser pressuposta uma tal independência.

§2. Constituição dos conceitos de variedade de grandeza extensiva a uma, duas, …, *n* dimensões.

§3. Redução da determinação da posição numa variedade dada às determinações quantitativas. Especificidades fundamentais de uma variedade extensiva a *n*-dimensões.

II. Relações métricas de que uma variedade a *n*-dimensões é passível, segundo o pressuposto de que as linhas possuem um comprimento independente da posição, e como tal que cada linha é mensurável a partir de outra

§1. Expressão dos elementos lineares. De como estas variedades devem ser consideradas planas, quando nelas o elemento linear é exprimível através da raiz de uma soma de quadrados de expressões diferenciais integrais.

§2. Investigação das variedades extensivas a *n*-dimensões nas quais o elemento linear pode ser representado através da raiz quadrada de uma expressão diferencial do segundo grau. Medição do seu desvio em relação à planura (curvatura) num dado ponto e numa dada direcção da superfície. Para a determinação das suas relações métricas é lícito e suficiente que a curvatura seja dada arbitrariamente em cada ponto $n\frac{n-1}{2}$ na direcção da superfície.

§3. Elucidação geométrica.

§4. As variedades planas (nas quais a curvatura é, em todo o lado, = 0) podem ser consideradas um caso especial das variedades com curvatura constante. Elas também podem ser definidas por permitirem em si uma independência das grandezas extensivas a *n*-dimensões em relação à posição (a sua mobilidade sem deformação).

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência 2: 2011.

§5. Superfícies com curvatura constante.

III. Aplicação ao espaço

§1. Sistema dos factos fundamentais que são suficientes para determinar as relações de medida do espaço, os quais a geometria pressupõe.

§2. Em que medida a validade destas determinações empíricas mantém a sua probabilidade quando é levada para além dos limites da observação, no desmedidamente grande?

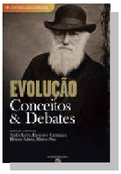
§3. Em que medida no infinitamente pequeno? Ligação desta questão com a explicação da natureza.

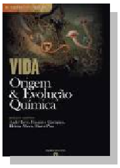
(Tradução de S. Varela Sousa)[20]

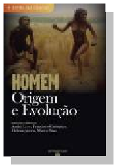
[20] Feita a partir do texto alemão transcrito por D. R. Wilkins, confrontada com as traduções inglesas de William Kingdon Clifford (edição da *Nature*, vol. VIII, nºs. 183, 184, pp. 14-17, 36, 37; edição de William Bragg Ewald, *From Kant to Hilbert: A Source Book In The Foundations Of Mathematics*, vol. II, pp. 652-661, Oxford University Press, Nova Iorque, 1996) e de Michael Spivak (*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. II, pp. 151-162, Publish or Perish, Houston, 1999).

Publicações do CFCUL

Colecção
Fundamentos e Desafios do Evolucionismo







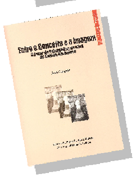
Colecção Thesis

1 - **A teoria de Oparine sobre a Origem da Vida. Uma abordagem no quadro da História e Filosofia das Ciências** (Helena Abreu).

2 - **A Imagem-Sensação: Deleuze e a Pintura** (Nuno Carvalho).

3 - **Metamorfoses do Conceito de Abdução em Peirce. O Exemplo de Kepler** (Ana Paula Silva).

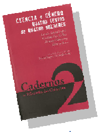
4 - **Electrões inobserváveis e estrelas invisíveis. Em torno do problema do Realismo em Ciência: Bas C. van Fraassen versus Alan Musgrave** (Cláudia Ribeiro).



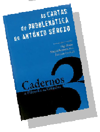
5 - **Entre o Conceito e a Imagem. O lugar da Psicanálise na obra de Gaston Bachelard** (Ana Gaspar).

Cadernos de Filosofia das Ciências

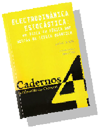
1 - **Cartas de Edmundo Curvelo a Joaquim de Carvalho (1947-1953) e Outros Inéditos** (selecção e introdução de Augusto J. Franco de Oliveira).



2 - **Ciência e Género. Quatro Textos de Quatro Mulheres: Londa Schiebinger, Evelyn Fox Keller, Donna Haraway e Hilary Rose** (selecção, tradução e prefácio de Teresa Levy e Clara Queiroz).



3 - **As Cartas de Problemática de António Sérgio** (selecção, introdução e estudos de Olga Pombo, Manuel Beirão dos Reis e João Luís Cordovil).

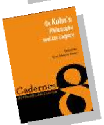


4 - **Electrodinâmica Estocástica: em busca da Física por detrás da Teoria Quântica, Luís de la Peña** (tradução e prefácio de Mário Gatta).

5 - **Sobre a Lógica e a Teoria da Ciência de Jean Cavaillès** (apresentação e tradução de Nuno Miguel Proença).

6 - **Ciência, Psicanálise e Poética em torno de Gaston Bachelard** (organização e apresentação de Ana Gaspar).

7 - **Wittgenstein, a prova e a actividade matemática: uma introdução** (Nuno Miguel Proença).



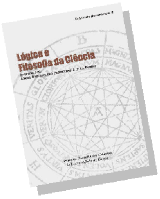
8 - **On Kuhn's Philosophy and its Legacy** (edited by Juan Manuel Torres).

9 - **Cinco Ensaios sobre Wittgenstein** (João Esteves da Silva).

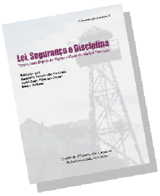
10 - **Henri Poincaré, Filósofo da Matemática. Breve antologia de textos** (Augusto J. Franco de Oliveira)

Colecção Documenta

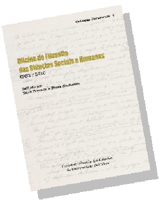
1 - **Abduction and the Process of Scientific Discovery** (Editado por Olga Pombo e Alexander Gerner).



2 - **Lógica e Filosofia da Ciência** (Editado por Olga Pombo e Ángel Napomuceno).



3 - **Lei, Segurança e Disciplina Trinta anos depois de Vigiar e Punir de Michel Foucault** (Editado por
António Fernando Cascais, José Luís Câmara Leme e Nuno Nabais).



4 - **Oficina de Filosofia das Ciências Sociais e Humanas CFCUL/ILTEC** (Editado por Nuno Proença e Marta Alexandre).

5 - **Corps et Signes. No Centenário do Nascimento de Claude Lévi-Strauss e Maurice Merleau-Ponty (Colóquio Internacional Filosofia das Ciências Humanas)** (Jean-Yves Mercury e Nuno Nabais).

Colecção A Imagem na Ciência e na Arte

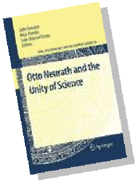
As cidades, os castelos e as ondas - imagens, diagramas e metáforas entre Calvino, Escher e Bohr
(João Araújo)

Neuroaesthetics. Can Science Explain Art?
(Olga Pombo, Silvia Di Marco e Marco Pina)

As Imagens com que a Ciência se Faz
(Olga Pombo e Silvia Di Marco)

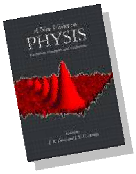
Solaris. Sistema Beta Pictoris
(Rodrigo Vilhena)

Outras Publicações



Unity of Science: New Approaches - Otto Neurath and the Unity of Science, Springer, 2010 (Olga Pombo, John Symons, Juan Manuel Torres; Eds.)

Studies in Diagrammatology and Diagram Praxis, London, College Publications, 2010 (Olga Pombo e Alexander Gerner; Eds.)

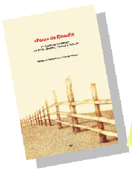


A New Vision on PHYSIS - Eurhythmy, Emergence and Nonlinearity (J. R. Croca and J. E. F. Araújo; Eds.)

Vivre en Europe. Philosophie, politique et science aujourd'hui (Bertrand Ogilvie, Diogo Sardinha, Frieder Otto Wolf ; Dir.)

Passeios Filosóficos / Promenades Philosophiques (Jean-Yves Mercury)

Conceito. Revista de Filosofia e Ciências do Homem (Editorial, José Luís Câmara Leme e Nuno Nabais)



«Fora» da Filosofia Vols. I e II (editado por Golgona Anghel e Eduardo Pellejero)

Centro de Filosofia das Ciências
da Universidade de Lisboa

http://cfcul.fc.ul.pt

O CFCUL é uma Unidade de I&D financiada pela:

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR