A Visão Riemanniana de uma Nova Abordagem à Geometria

Erhard Scholz
(Universidade de Wuppertal)
scholz@math.uni-wuppertal.de

O Conceito Geral de Variedade e as *Formas Seriais* de Herbart

Como pode um matemático delinear uma visão *fundacional*-mente nova de uma disciplina matemática? Pode virar-se para a filosofia da matemática e falar *sobre* matemáticas, isto é, a um meta-nível, reflectindo sobre o seu próprio trabalho e o de outros matemáticos. Ou pode tentar esboçar a arquitectura da nova disciplina matemática em questão. Neste último caso tem de introduzir conceitos, construções e teoremas como tijolos técnicos centrais de uma teoria matemática. Normalmente, ele pode gizar sobre toda a rede de resultados de outros cientistas, o que aproxima a sua visão da tradição e atenua a novidade dos seus resultados. Assim, se é uma quebra epistemológica que se intenciona, tem de se tomar partido de pelo menos alguns elementos da primeira aproximação, mais filosófica. As ocasiões para viragens epistemológicas agudas são raras na história das matemáticas. A contribuição de Riemann para a geometria é um dos mais proeminentes exemplos.

Como bem se sabe, Riemann organizou a sua abordagem à geometria em torno do novo conceito de *variedade* (*Mannigfaltigkeit*), o qual, por razões evidentes, não podia definir num sentido matemático técnico. Como tal, fê-lo de um modo semi-filosófico, trabalhando consciente e cautelosamente sobre pistas de C. F. Gauss, que tinha falado geometricamente sobre números complexos (Gauss, 1831) e J. F. Herbart que tinha defendido o uso de uma figuração imaginativa geométrica em todo o tipo de formações conceptuais, as suas denominadas *formas seriais* (*Reihenformen*). Em termos vagos, uma forma serial contínua é produzida na imaginação quando uma classe de imagens mentais, ou representações (*Vorstellungen*), é sujeita ao que Herbart chamou uma *fusão gradual* (*abgestufte Verschmelzung*), isto é, uma fusão mental que não destrói cada representação individualmente tomada, mas aglutina-as, resultando daí que uma transição contínua de uma para outra se torna possível (Herbart, 1825, 193*)[1]. Riemann não se preocupou muito com a teorização ontológica específica que Herbart deu deste processo, *prima facie* psicológico, de formação de conceitos, naquilo que Herbart chamou de *sinecologia* (*Synechologie*).

Riemann antes preferiu aludir, apenas vagamente, a esta concepção Herbartiana (1854, pp. 160-161 deste dossier). Pressupôs a existência de conceitos, matemáticos ou não, que podem surgir como resultado de uma "fusão gradada" nas formas seriais[2]. Apropriou-se do resultado e abriu-o a considerações matemáticas, assim formando o seu conceito de *grandeza de múltipla extensão* (*mehrfach ausgedehnte Grösse*) ou *variedade*.

Reformulando a sua abordagem brevemente: em contraste com uma aproximação teórica estabelecida, Riemann pressupôs um conceito tomado de um qualquer campo de investigação, e como tal pré-existente num certo sentido epistémico em ambos os níveis da lógica tradicional, intensão (definida por propriedades, nos termos do campo especificado) e extensão (provida de um conjunto de instanciação bem definido). Para Riemann, o aspecto extensional do conceito foi de primeira importância, com relativamente pouca penetração nas questões fundacionais relacionadas. Tirando umas esparsas – mesmo à luz dos posteriores, importantes, desenvolvimentos da teoria dos conjuntos – observações sobre variedades finitas ou discretas, Riemann avançou directamente para esses casos onde as especificações particulares do conceito admitem *transições contínuas*. Tal deveria ser tomado num sentido intuitivo, pois o conceito de continuidade só viria a ser analisado matematicamente após as definições formais dos números reais terem surgido e as ideias teóricas sobre os conjuntos terem sido formuladas, ou seja, não antes de 1870/80[3]. A abordagem de Riemann foi, de algum modo, paralela à introdução das formas seriais de Herbart; mas Riemann especificou ainda mais a ideia, através de uma sucessiva reconstrução local, num sentido quase-cinemático, por parâmetro-1, parâmetro-2, …, parâmetro-(n-1) e, finalmente, a variação parâmetro-n na determinação das especificações do conceito. Nestes casos, ele admitiu a evidente,

---

[1] Um asterisco numa citação de Herbart indica que Riemann leu e seleccionou a passagem correspondente durante os seus estudos da filosofia de Herbart. Para mais detalhes, ver [Scholz, 1982a].

[2] Riemann enfatizou, contudo, que, de acordo com a sua posição e em contraste com a de Herbart, tais *formas seriais* contínuas (Herbart) ou *grandezas extensivas* (Riemann) são muito mais frequentes nas "altas matemáticas" do que noutras áreas do conhecimento.

[3] Cf. [Johnson 1979/1981, 1987], [Moore, 1989].

mas drasticamente generalizada, terminologia geométrica de *ponto* para uma especificação particular do conceito geral (variedade).

Outro aspecto desta reconstrução local é, de acordo com Riemann, a possibilidade de introduzir sistemas com *n*-funções, cujos valores separam (localmente) pontos na variedade. Isto conduz a sistemas de coordenadas que tornam a variedade acessível às construções matemáticas e a posteriores investigações. Neste ponto, Riemann até aludiu à possibilidade de variedades a infinitas dimensões[4]. Esta abordagem é semelhante à da introdução moderna das variedades topológicas, diferenciais, riemannianas, etc; sendo contudo o papel do espaço topológico tomado, em sentido vago, por um tipo Herbartiano de *forma serial*, sustido na intuição matemática.

Geometria Diferencial

Logo na sua comunicação inaugural (1854), Riemann apontou claramente para uma distinção básica entre as investigações matemáticas que são possíveis nas variedades, entre aquelas que são «independentes da medição» (analysis situs), e aquelas que assumem estruturas métricas (geometria diferencial). Embora Riemann aludisse apenas muito brevemente na sua comunicação ao primeiro ramo desta divisão (*analysis situs*), restringindo-se, a esse respeito, à reconstrução local e à escolha de coordenadas em $\mathbb{R}^n$, era já bastante claro para ele que a teoria topológica das variedades era por si só um assunto matemático desafiante e promissor. Retornarei a este ponto na próxima secção deste artigo.

O principal assunto da comunicação de Riemann, contudo, era geometria métrica de variedades, o qual ele introduziu como uma profunda generalização da geometria diferencial de superfícies de Gauss. É verdade que Gauss tinha preparado o caminho para Riemann da melhor maneira possível, desenvolvendo a natureza intrínseca da geometria métrica das superfícies no seu *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828)[5]; e Riemann (1854, pp. 160-161 deste dossier), muito

[4] "Repetindo este processo *n* vezes, a determinação da posição numa variedade de extensão a *n*-dimensões é então reduzida a *n* determinações da grandeza, e como tal a determinação da posição numa dada variedade, quando isso é possível, é reduzida a um número finito de determinações quantitativas. Há variedades nas quais a determinação da posição não requer um número finito, mas ou uma série infinita ou uma variedade contínua de determinações da grandeza. Tais variedades formam, por exemplo, as possíveis determinações de uma função para uma dada região, as formas possíveis de uma figura no espaço, e por aí fora.", Riemann, 1854, p. 163 deste dossier.

[5] Em particular, desenvolveu o papel central do *Theorema egregium* (a determinação intrínseca da curvatura da superfície) e o *Theorema aureum* (a soma dos ângulos de triângulos geodésicos).

claramente, referiu-se a isso. Não obstante, o conceito de Gauss estava severamente restringido por aderir ao quadro conceptual do espaço euclidiano. As suas superfícies estavam sempre inseridas no espaço euclidiano tridimensional, mesmo se a sua investigação métrica conduzia a aspectos intrínsecos. A autonomia do objecto geométrico (aqui: superfície) era apenas visada implicitamente; Gauss não o afirmou explicitamente, nem o podia fazer no seu contexto. Como tal, Gauss não se atreveu a formular conceptualmente esta autonomia, pois preferiu aceitar as delimitações da "filosofia euclidiana" da geometria, pelo menos nos seus escritos publicados. Esta restrição apenas permitiu generalizações do pensamento geométrico como analogia, figuração imaginativa, ou metáfora noutros contextos matemáticos.

Isso mudou completamente com Riemann. O seu conceito de variedade foi formado exactamente para transformar figuração imaginativa e metáfora em conceitos estritamente matemáticos de um quadro geométrico generalizado, assim libertando o pensamento geométrico da camisa-de-forças euclidiana. Introduziu o conceito de variedade métrica (*Mannigfaltigkeit mit Massbestimmung*), daquela maneira famosa, através da selecção de uma forma diferencial quadrática positiva determinada,

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j (1 \leq i, j \leq n),$$

a qual o permitiu transferir construções essenciais da teoria das superfícies de Gauss para a geometria generalizada das variedades.

Mais importante a este respeito foi a transferência do conceito de curvatura para as variedades. Na sua comunicação inaugural, Riemann fê-lo introduzindo a *curvatura seccional* de um elemento infinitesimal da superfície, mesmo que apenas com uma descrição do procedimento para o derivar, mas sem dar uma fórmula geral explícita. Isto permitiu-o falar sobre *variedades de curvatura constante* como um elo de ligação entre a teoria geométrica diferencial geral das variedades, e a teoria do espaço físico.

Mencionou dois resultados principais:

1. Variedades de curvatura constante são exactamente aquelas nas quais a livre mobilidade de figuras rígidas é possível.
2. Numa variedade de curvatura constante α, é sempre possível escolher coordenadas locais tais que o sistema métrico seja dado por
3.

$$ds^2 = \frac{\alpha \sum_i dx_i^2}{(1+\frac{\alpha}{4}\sum_i x_i^2)^2}.$$

Menciono o trabalho posterior de Riemann (1861) sobre a propagação do calor num corpo homogéneo apenas de passagem. Aí Riemann introduziu o famoso símbolo de 4 índices em segundas derivadas da métrica como critério da planura de uma variedade métrica (riemanniana), o qual foi posteriormente identificado como um *tensor de curvatura*[6].

Passos em direcção a uma Teoria Topológica das Variedades

Agora quero regressar às distinções básicas de Riemann entre estudos sobre "variedades com métrica" e variedades "independentes de medição" ou *analysis situs.* Já na sua bem conhecida dissertação de doutoramento sobre a teoria das funções complexas (1851), Riemann tinha lidado com questões de analysis situs. Aí tinha introduzido as *superfícies riemannianas* para funções analíticas multi-valoradas numa região complexa e tinha começado a estudar em detalhe a topologia de superfícies compactas orientadas com fronteiras. Tinha usado a *dissecção das superfícies* para componentes com ligações simples, resultando numa classificação completa destas pelo *número de componentes de fronteira* e *ordem da co-relação* (*Ordnung des Zusammenhangs*) *m*. Esta última tinha sido introduzida por ele como soma alternada do número *e* para cortes transversais e do número *f* para componentes de ligação simples

$$m = e - f = -\chi(F),\ [\chi(F) \text{ a característica Euler de F}].$$

Como é claro, um dos argumentos centrais de Riemann nesta passagem foi o de que este número é independente das escolhas específicas do processo de dissecção (1851, 11 e ss.).

Três anos após a sua comunicação inaugural, na sua grande *memória sobre as funções abelianas*, Riemann fez uso de outra abordagem à caracterização da topologia das superfícies, a partir das *relações de fronteira* de sistemas com curvas fechadas no interior da superfície (Riemann, 1857). Desta vez estudou exclusivamente superfícies orientadas fechadas e procurou sistemas de curvas fechadas, os quais formam uma fronteira completa de uma parte da superfície. Nesta relação, introduziu um conceito apropriado de equivalência de sistemas de curvas, e mostrou que o número máximo de curvas fechadas que não constituem uma fronteira completa é independente da escolha específica de curvas, e dá uma boa classificação do género topológico da superfície. Como pôde mostrar que no caso de superfícies (riemannianas) fechadas o número máximo de curvas (cíclicas) fechadas independentes na fronteira é par, foi

[6] Uma investigação recente neste trabalho é dada por [Farwell/Knee 1990].

conduzido ao famoso *invariante numérico 2p* para estas superfícies (*p* foi mais tarde chamado *genus* por Clebsch). E, claro, mostrou como a caracterização do *genus* é traduzida para a "ordem de conectividade" *m* de (1851): pontue-se a superfície fechada [característica de Euler $\chi(F) = 2 - 2p \rightarrow \chi(F') = 1 - 2p$], e obtém-se uma superfície com fronteira para a qual a aplicação do método de dissecção mostra que os cortes transversais $2p$ podem ser usados para dissectar a superfície numa região de conexão simples (1857, 93 e ss.). Portanto, na terminologia de (1851), a ordem de conectividade da superfície puncturada é $m=2p-1$ [a qual de facto é $-\chi(F')$].

Então, se adicionarmos as compreensões de Riemann de (1851) e de (1857) à sua comunicação inaugural, vê-se que ele, no caso bidimensional, de facto deu o primeiro passo em direcção a uma teoria topológica das variedades, contendo os dois aspectos complementares de

— dissecção em células de conexão simples e consideração da característica de Euler no complexo de células;

— caracterização homológica de superfícies fechadas, contado o primeiro número de Betti.

Tudo isto foi discutido, a partir de diferentes pontos de vista, na literatura histórica, tal como o facto de Riemann ter começado a pensar sobre uma generalização dos seus métodos de analysis situs a variedades com mais dimensões [Bollinger 1972, Pont 1974; Scholz 1980, etc.]. Deixou um fragmento do espólio sobre este tópico, onde fez experiências com dissecção e ideias bordistas em variedades a mais dimensões (*Werke*, 479-482).

Devo apenas acrescentar que uma investigação do próprio manuscrito fragmentário (*Riemann*, Espólio **16**, 44^{r}, $46^{r\text{-}v}$, $49^{r\text{-}v}$) apresenta algumas provas circunstanciais de que Riemann trabalhou nestas ideias no período entre a sua dissertação de doutoramento e a sua lição inaugural, não antes nem muito depois de 1857 [Scholz 1982b]. Portanto, podemos ler os fragmentos sobre analysis situs como um enquadramento (escondido) para a curta, e em si bastante vaga, referência de Riemann à topologia das variedades na lição de 1854.

Primeiros Vislumbres de outras Estruturas Geométricas

O próximo ponto que quero discutir é a surpreendente, refinada e diferenciada aproximação ao pensamento geométrico que foi aberta por Riemann, graças ao seu conceito de variedade. Esta visão da geometria estava em linha com as hipóteses mais abrangentes e profundas do pensamento geométrico durante a viragem em direcção à

Kairos. Revista de Filosofia & Ciência 2: 2011.

"matemática moderna" dos finais do séc. XIX e do início do séc. XX. Estas mudanças dizem respeito tanto à semântica como à estrutura interna da geometria. Do ponto de vista da semântica, o aspecto mais impressionante no desenvolvimento do séc. XIX é o afastamento em relação às teorias geométricas a partir de referências predominantes, ou mesmo exclusivas, ao espaço físico (ainda se talvez compreendidas num disfarce filosófico *a priori*). Por outro lado, um âmbito de novos campos de referência despertou dentro do próprio conhecimento matemático, particularmente na análise, álgebra e aritmética. Associando-se a este desenvolvimento e como seu resultado, as teorias geométricas tornaram-se mais abstractas e mais diversificadas. E contudo, elas deviam manter-se coesas através de ideias organizadoras centrais.

Para Riemann, a última função foi assumida pelo seu conceito de variedade, o qual admitia diferentes enriquecimentos com ideias estruturais derivadas das situações contextuais. Uma vez mais, foi o seu trabalho teórico sobre funções, onde desenvolveu com mais clareza (se bem que restringido ao caso real bidimensional ou ao caso complexo a uma dimensão) algumas ideias básicas para o estudo das variedades com estruturas que iam além daquelas sobre as quais falou na sua lição de 1854. Mais importante, deste ponto de vista, são as suas investigações sobre *funções abelianas* (1857), as quais contêm ideias extremamente originais sobre superfícies (ou curvas, dependendo do ângulo), do ponto de vista *complexo analítico* e/ou complexo *birracional*.

Este não é o lugar para discutir estas questões em detalhe[7], mas aqui tenho de mencionar duas compreensões gerais e fundamentais de Riemann. A primeira é a sua análise da *estrutura meromórfica* de uma superfície compacta de tipo p. Riemann caracterizou os integrais abelianos do segundo tipo através de um conjunto de condições independentes (comportamento dos pólos e parte real dos períodos) usando o último e disputado princípio de Dirichlet. Num segundo passo, derivou uma estimativa do número de funções meromórficas linearmente independentes na superfície com pólos simples em m pontos escolhidos tal como

$$\mu \geq m - p + 1.$$

O resultado foi mais tarde afinado pelo seu aluno Roch no *teorema de Riemann-Roch*:

$$\mu = m - p + r + 1,$$

(com r = número de diferenciais abelianos linearmente independentes do primeiro tipo, com zeros nos pontos m dados). *Este foi o primeiro resultado da*

[7] Vd., p. ex., [Dieudonné 1974, pp. 42 e ss.; Gray 1989, pp. 361 e ss.; Scholz 1980, 68 e ss.]

geometria moderna a estabelecer uma relação bem fundamentada entre a topologia de uma variedade e uma estrutura mais refinada, neste caso a da analítica complexa numa curva complexa compacta.

O próximo ponto a referir neste contexto é a compreensão de Riemann de que as funções meromórficas numa curva podem de facto ser exprimidas como *funções racionais* em duas delas, digamos z e t, as quais, lidas como coordenadas não-homogéneas em $P(2, \mathbb{C})$, permitem que a curva seja representada algebricamente como

$$F(z, t) = 0, F \in \mathbb{C}[z, t].$$

Isto possibilita, como Riemann claramente afirmou, estudar qualquer curva compacta complexa de um ponto de visa puramente algébrico birracional. Em particular, a mudança de coordenadas de representação (z,t) para (z',t') é dada por transformações racionais em ambas as direcções. Além disso, Riemann indicou o caminho em direcção a uma estrutura puramente algébrica ligada ao seu conceito de variedade. O desenvolvimento destas ideias levaria mais tarde, como é claro, a uma adaptação do conceito subliminar de variedade ao contexto algebraico-geométrico e a uma transformação em diferentes tipos de variedades algébricas. Esta é uma história distante do tempo de Riemann, e mais próxima do presente do que quaisquer outros pontos aqui mencionados[8].

Fundamentos da Geometria

Voltando à lição inaugural, tem de ser dito que Riemann apenas deu breves indicações de que o conceito de variedade podia ser mais desenvolvido do ponto de vista das estruturas analíticas ou mesmo puramente algébricas[9]. O título desta conferência indicava outra linha de investigação, nomeadamente os fundamentos da geometria. Não há dúvida de que após a lição inaugural se ter tornado acessível a um público científico mais vasto com a sua publicação em 1867 (*Göttinger Abhandlungen*), a rápida recepção das ideias geométricas de Riemann foi muitíssimo importante e influente no debate sobre o carácter e a interpretação da *geometria não-*

[8] Vd. [Dieudonné 1974] para uma primeira perspectiva historiográfica.

[9] Contudo, Riemann referiu, de passagem, que "Tais investigações [em analysis situs das variedades, Erhard Scholz] tornaram-se uma necessidade para muitas áreas da matemática nomeadamente para o tratamento de funções analíticas multi-valoradas, e a sua carência é sem dúvida a causa principal de o famoso teorema de Abel e as conquistas de Lagrange, Pfaff, e de Jacobi para a teoria geral das equações diferenciais, permanecerem há tanto tempo infrutíferas." (*Sobre as Hipóteses nas quais a Geometria se Fundamenta*, I.1, p.162 deste dossier).

euclidiana. Isso é verdade em particular para a influência de Riemann em Beltrami (visível pelo progresso conceptual deste último entre os seus dois escritos de 1868 sobre geometria não-euclidiana), em Helmholtz (ainda que também as ideias de Helmholtz sobre a livre mobilidade como "facto" central no base da geometria tenham sido desenvolvidas antes de ter lido Riemann) e em Clifford, apenas para dar os três exemplos mais proeminentes.

De facto, a abordagem de Riemann, e em particular a sua discussão das variedades de curvatura constante, podem facilmente ser lidas no contexto das investigações de Bolyai e Lobatchevski, pois Riemann esboçou uma sofisticada estrutura conceptual para uma interpretação possível e satisfatória da geometria não-euclidiana. Surpreendentemente, *não há quaisquer indicações de que Riemann tenha conhecido, mais do que superficialmente, o trabalho de Bolyai e Lobatchevski, e talvez mesmo não o tenha conhecido de todo*. Consequentemente não se preocupou com a potencial ligação íntima entre as suas considerações e as deles. Tentarei apresentar os principais argumentos para esta tese, a qual discuti mais em detalhe noutro lugar [Scholz, 1982b].

Pode até ser surpreendente que na lição inaugural de Riemann o único "reformador moderno da geometria" citado pelo nome seja Legendre. Tal ajusta-se à observação de que nunca na sua comunicação (nem em nenhum outro lado) Riemann mencione o axioma das paralelas – nem sequer como um comentário comparável àquele que se refere à teoria topológica das variedades e ao seu papel na teoria das funções complexas. Tal deve parecer desconsolador se se quiser tentar ver uma referência consciente à geometria não-euclidiana no título de Riemann, *Hipóteses nas quais a geometria se fundamenta*. É tanto mais assim quanto as duas últimas secções da segunda parte da exposição (sobre geometria diferencial das variedades) lidam com variedades de curvatura constante, de modo que um comentário sobre o diferente comportamento das paralelas, dependendo da curvatura, teria um óbvio lugar e contexto.

Torna-se ainda mais claro que Riemann nunca se preocupou com as questões fundacionais da geometria no sentido lógico, quando se tem em conta a passagem no seu *Espólio*, a qual foi aparentemente escrita nos anos 1852/1853, ou seja, algum tempo, embora não muito, antes da sua lição inaugural. Neste fragmento anterior a 1854, Riemann ensaiou a ideia de uma variedade e lidou com a relação entre o conceito de variedade e questões fundacionais de geometria[10]. Em particular, assinalou que um tratamento da geometria do ponto de vista das variedades tornaria

[10] Riemann, *Espólio* (**16**, folio $40^{r\text{-}v}$) publicado em [Scholz 1982b, 228-230] com uma correcção de E. Neuenschwander.

supérfluos todos os axiomas de Euclides especificamente geométricos e ofereceria a possibilidade de reduzir os axiomas necessários àqueles que “valem para as quantidades em geral...”. Como único exemplo do que poderia ser provado dentro desta estrutura, Riemann cita o axioma 9 de Euclides, o qual estabelece que, dados dois pontos, existe apenas uma linha recta incidente sobre eles. Uma vez mais, o problema das paralelas não é sequer citado.

No que se segue, Riemann afirmou com bastante honestidade o motivo pelo qual estava satisfeito com este simples exemplo e porque não via razão para ir mais longe nestas questões fundacionais:

> Mas mesmo que haja interesse em compreender a possibilidade deste modo de tratar a geometria, a realização deste último seria extremamente estéril, pois deste modo não encontraríamos novos teoremas, e aquilo que parece simples e claro na descrição do espaço, tornar-se-ia por isso complicado e difícil. (Riemann, Espólio, **16**, 40^{r})

Este é um testemunho claro de que Riemann não mostrava muito interesse em estudos detalhados sobre os fundamentos lógicos da geometria, precisamente porque presumia que eles seriam estéreis do ponto de vista de novos teoremas. Esta posição é completamente compreensível do seu ponto de vista, *mas não é sustentável se estivermos familiarizados com os trabalhos de Bolyai e/ou Lobatchevski*. Os estudos deles sobre geometria absoluta e sobre geometria horocíclica no caso não-euclidiano [Gray 1979], para nomear apenas dois exemplos, é demasiado obviamente incompatível com um tal veredicto de “esterilidade”.

Por outro lado, Riemann deu uma ideia de porque, em seu entender, o estudo das variedades era *realmente* importante. Na exacta continuação da citação já dada, continua ele:

> Como tal, em todo o lado se enveredou pelo caminho oposto, e cada vez que se encontram variedades a várias dimensões na geometria [matemática?, Erhard Scholz], tal como na doutrina dos integrais definidos na teoria das quantidades imaginárias, toma-se a intuição espacial como um auxílio. É bem sabido como assim se obtém uma perspectiva real do assunto e como, portanto, apenas os pontos precisamente essenciais são enfatizados.

Esta citação concorda inteiramente com a principal linha de raciocínio na lição inaugural de Riemann, naquilo que diz respeito às variedades dentro das matemáticas. Se Riemann tivesse obtido um conhecimento mais profundo dos recentes estudos fundacionais de Bolyai ou Lobatchevski durante o período que mediou a formulação destas observação e a sua lição inaugural, teria tido motivo suficiente para mencionar estes novos e inesperados aspectos. Tal não é, contudo, o caso.

Conceito de Variedade e Espaço Físico

Temos de concluir que as "hipóteses nas quais a geometria se fundamenta" de Riemann têm conotações diferentes das dadas nos finais de 1860 e 1870, quando o debate sobre a geometria não-euclidiana estava no pico. Uma destas outras conotações já foi mencionada. Riemann muito conscienciosamente iniciou a introdução da linguagem geométrica (não-metafórica) noutros domínios matemáticos (teoria das funções complexas, equações diferenciais, etc.) e precisava portanto de novos conceitos fundamentais e "hipóteses" na geometria. Este foi o aspecto puramente matemático do seu empreendimento, mantido em segundo lugar na sua comunicação de 1854.

O *principal marco* da lição inaugural de Riemann, por outro lado, foi a *reformulação dos fundamentos conceptuais da geometria física*. Isto é tornado totalmente claro pela arquitectura da comunicação e pela selecção de tópicos principais, que culminou numa proposta de como podia usar-se o conceito de variedade para analisar mais profundamente as propriedades do espaço físico. Este objectivo ilumina também as razões pelas quais Riemann escolheu variedades de curvatura constante como a única classe de exemplos para um tratamento mais detalhado na sua segunda parte, sobre geometria diferencial.

A intenção de Riemann na última parte da sua lição foi a de esboçar metodologicamente o modo como o conceito de variedade podia ser utilizado para melhorar a compreensão do espaço físico. Logo ao início dessa discussão, ele afirma que, para uma tal aplicação do novo conceito, é essencial saber qualquer coisa sobre condições "suficientes e necessárias para determinar as relações métricas do espaço" (tomando por garantido que o espaço físico pode ser analisado como uma variedade com métrica da geometria diferencial riemanniana). Variedades de curvatura constante tornaram-se importantes neste contexto, pois nesta classe de exemplos tais condições são facilmente caracterizadas.

> — Se a livre mobilidade dos corpos rígidos é assumida, a curvatura é constante, e a determinação da soma dos ângulos num triângulo por si só determina a curvatura e a métrica de toda a variedade.
> — Se a soma dos ângulos de todos os triângulos é equivalente a dois ângulos rectos, todas as curvaturas seccionais são zero, e o espaço é euclidiano (pelo menos, localmente).
> — Se nenhum destes é o caso, a determinação da métrica fica completamente em aberto.

Após um curto excurso pelas questões de ilimitação e infinitude do espaço, as quais o próprio Riemann classificou como, “para a compreensão da natureza, questões inúteis” (müssige Fragen) (1854, p. 172 desde dossier), regressou às relações métricas do espaço. Considerou-as da mais elevada importância, pois “perseguem-se os fenómenos até ao muitíssimo pequeno, a fim de conhecer as conexões causais mútuas, tanto quanto o microscópio queira permitir”. E “é na exactidão com que acompanhamos os fenómenos até ao desmedidamente pequeno que essencialmente se funda o conhecimento das suas conexões causais mútuas” (id.)

Aqui, uma vez mais, discutiu os indícios empíricos existentes, do ponto de vista de uma alternativa teórica. A principal observação referida (sem mencionar nomes), foram as recentes medições astronómicas de Bessel (em 1838) das paralaxes das estrelas fixas, as quais cumpriam os mais elevados padrões técnicos da época e que deram valores positivos para algumas estrelas (mais próximas), mas zero para a maioria delas. Isso constitui boa prova da existência de grandes triângulos de escala astronómica com soma de ângulos π (se se excluírem os casos de curvatura positiva, o que aparentemente Riemann fez sem qualquer aviso). Riemann extraiu então a conhecida conclusão:

— se se assumir a livre mobilidade dos corpos rígidos, então o espaço é euclidiano, com a maior precisão possível disponível à época.
— se, porém, a livre mobilidade não é sustentável, então “a curvatura de todas as porções de espaço mensuráveis não [é] sensivelmente diferente de zero”, deixando em aberto a possibilidade de drásticas alterações da curvatura no pequeno, as quais são neutralizadas se integradas em regiões maiores (1854, ibid.).

Riemann fecha esta passagem com o aviso de que não se deve tomar a geometria euclidiana por garantida, por muito persuasiva que ela possa parecer. O seu argumento chega mesmo, nesta ligação, a lançar dúvidas sobre a aplicabilidade geral do seu próprio conceito métrico e mostra que também os seus próprios recentes conceitos não podem ser considerados como um novo tipo de *a priori* (neo-) kantiano. Fez notar que “…os conceitos empíricos, nos quais se fundam as determinações métricas do espaço (a noção de corpo sólido e a de raio de luz), perdem a sua validade no infinitamente pequeno”. Como tal, deve estar-se sempre aberto a uma revisão dos conceitos fundamentais da geometria (física) “enquanto não se lograr explicar os fenómenos de modo mais simples” (1854, *ibid.*). Esta é, vista à distância, uma observação particularmente impressionante, pois a mudança para uma métrica lorentziana ou semi-riemanniana na relatividade geral e especial foi uma revisão de conceitos fundamentais deste tipo e – para comentar esta observação de Riemann de modo ainda mais anacrónico – algo semelhante está a ser hoje procurado na investigação em curso da estrutura quântica do espaço(-tempo).

Tudo isto mostra claramente o modo como Riemann queria proceder na elaboração das "hipóteses nas quais a geometria (física) se fundamenta". Estas tiveram de ser repensadas e talvez mesmo revisitadas uma e outra vez, com cada indício fundamentalmente novo sobre os instrumentos físicos de medição métrica. Terminou com uma curta observação sobre o papel da matemática neste processo:

> Investigações que, como a que aqui foi perseguida, partem de conceitos gerais, só podem aí ser úteis se ajudarem a preservar esse trabalho de concepções tacanhas, e a resguardar dos preconceitos o progresso no conhecimento das relações mútuas entre as coisas. (1854, p. 173 deste dossier)

Esta observação conduz-nos ao nosso último ponto, a definição filosófica que Riemann dá da função da matemática no conhecimento da realidade física.

A Epistemologia riemanniana das Matemáticas

Riemann não era obviamente nem um empirista, nem um kantiano. Podia, contrastando por exemplo com Gauss, ir facilmente além dos limites restritivos da geometria euclidiana, visto ter desenvolvido uma boa compreensão da filosofia dialéctica alemã pós-kantiana, em particular através dos seus extensos e detalhados estudos da filosofia de Johann Friedrich Herbart (1776-1841). De facto, Herbart tinha defendido uma linha filosófica paralela, a qual era essencialmente realista na sua metodologia e ontologia, sem perder os seus compromissos com a dialéctica na sua epistemologia. Isto aproximou-a mais das linhas de pensamento dos cientistas do que da filosofia idealista alemã convencional da época. Não posso entrar aqui em muitos detalhes[11], mas quero delinear alguns dos aspectos filosóficos subjacentes ao trabalho matemático de Riemann, os quais foram profundamente influenciados por Herbart e, sem dúvida, com uma importância geral maior para o seu trabalho do que apenas a vaga referência às "formas seriais" de Herbart.

Antes de mais, o pano de fundo herbartiano deu a Riemann uma visão pós-kantiana da epistemologia. Herbart, contrastando com os dialécticos idealistas da época, viu o papel do desenvolvimento dialéctico sobretudo na formação de conceitos

[11] Para este assunto, vd. [Scholz 1982a].

e na metodologia do conhecimento. Não era dialéctico, tanto quanto respeita a ontologia. Sabemos, através do espólio de Riemann, que este estudou exactamente, com intensidade e no essencial, concordando, aquelas partes que eram constitutivas na epistemologia de Herbart[12]. Tal formou o enquadramento para o desenvolvimento da própria posição dialéctica de Riemann com respeito à epistemologia, explicitamente afirmada, por exemplo, nos fragmentos filosóficos publicados por Weber nas *Werke* de Riemann (521-525).

Consequentemente, Riemann não partilhava da visão kantiana restritiva de uma única estrutura determinada de conhecimento sintético *a priori*, na qual a matemática, de acordo com Kant, constitui uma parte essencial. Para Riemann não havia lugar para uma dedução das formas transcendentais da cognição puramente *a priori*[13]. Mas, por outro lado, também não sucumbiu às armadilhas do empirismo. O conhecimento teórico, em particular a teoria matemática, na medida em que constitui uma estrutura para o conhecimento científico, tem, de acordo com Riemann, um papel naquilo que quero chamar um *a priori relativo* ou *dialéctico*, com respeito ao conhecimento empírico.

— Este conhecimento é *a priori*, porque nunca pode ser derivado por indução, generalização, ou mesmo idealização directa a partir da experiência. É constituído por uma criação conceptual deliberada e serve como sistema teórico de referência para investigações empíricas e, como tal, tem um papel formativo na cognição do mundo empírico.

— Por outro lado, este conhecimento é *relativo* e *dialéctico*. A sua estrutura não é inteiramente determinada, ou seja, há lugar para escolhas teóricas no processo de geração de conceitos, e estas escolhas são feitas tendo em consideração as provas empíricas disponíveis. Tão pouco é estável no tempo; é sujeito a mudanças durante o processo histórico de refinamento do conhecimento. *Refinamento* (termo de Riemann) pode ser entendido como uma expressão pragmática para um tipo de mudança conceptual que ultrapassa a antiga estrutura sem destruir completamente a validade desta última. Como tal, partilha o aspecto característico da negação dialéctica <*Aufhebung*>, mesmo se apresentada numa linguagem menos elaborada.

---

[12] Riemann, *Espólio* (**16**, 59^v, 64^r, 141^r) – vd. [Scholz 1982a] – e a própria auto-descrição de Riemann: “O autor [Riemann, Erhard Scholz] é herbartiano em psicologia e epistemologia […]; na maior parte dos casos não pode concordar, contudo, com a filosofia natural de Herbart e com as disciplinas metafísicas (ontologia e sinecologia) que a elas se referem.” (Riemann, *Werke*, 508)

[13] A tendência anti-kantiana da comunicação de 1854 de Riemann é discutida com maior detalhe por [Nowak 1989].

Ambos os aspectos eram já inerentes à epistemologia de Herbart, mas foram formulados por Riemann nos seus fragmentos epistemológicos como uma sua posição própria[14]. A matemática desempenha, de acordo com Riemann, um papel crítico essencial. Ela deve assegurar que a cognição da realidade "…[é] preserva[ada] […] de concepções tacanhas, e resguarda[da] dos preconceitos […] no conhecimento das relações mútuas entre as coisas.." (citação completa acima). É evidente que para Riemann a função crítica das investigações matemáticas não se restringe a minar a validade dos antigos conceitos, mas estabelece também conceitos novos e mais amplos.

Este ponto de vista permitiu a Riemann conceber uma revisão tão fundamental da estrutura conceptual do espaço físico como a que foi dada na sua lição inaugural. Sabemos que Gauss pensou sobre a necessidade de ir além da perspectiva kantiano-euclidiana, mas que nunca se atreveu emergir com uma tal posição perante o público científico. Riemann conhecia as mudanças que tinham tido lugar no terreno filosófico durante o início do século e usou-as como um sistema de referência positivo para as suas próprias propostas com respeito à geometria física.

Há ainda um ponto a acrescentar. A clara orientação conceptual de Riemann, a qual o levou a enunciar conceitos centrais nas diferentes áreas da matemática sobre as quais trabalhou (variedades em geometria, superfície riemanniana em teoria das funções, o integral de Riemann na teoria da convergência de séries trigonométricas, etc.) estava também muito em linha com o conceito de Herbart de *estudos filosóficos das ciências*. Herbart, sendo um dos filósofos alemães da pedagogia nas primeiras décadas do séc. XIX, tinha visto uma ligação próxima entre filosofia, estudos filosóficos das ciências e um tipo de reforma social que foi promovida pelo estado, porém levada a cabo por uma classe de homens com formação (científica). De forma a preencher uma tal função, as ciências não deviam ser levadas a cabo num estilo predominantemente técnico, mas estudadas no que ele chamou *espírito filosófico*. Isto levou Herbart a postular uma procura continuamente renovada por, e uma elaboração de, conceitos centrais nas diferentes disciplinas científicas. De facto, as ciências deviam organizar-se em torno de *conceitos centrais* <*Hauptbegriffe*> (Herbart 1807). A própria filosofia devia então cultivar as ligações e dissolver possíveis contradições entre os conceitos centrais das diferentes áreas científicas. Por uma tal comunicação,

---

[14] "…Nos conceitos através dos quais concebemos a natureza, não apenas as nossas percepções são, em cada momento, complementadas, mas também as percepções futuras são descriminadas como necessárias, ou, na medida em que o sistema conceptual não estiver suficientemente completado para esse fim, determinadas como prováveis…" E, um pouco a seguir: "…Os sistemas conceptuais que as subjazem agora [as ciências exactas, Erhard Scholz], foram formadas por mudança gradual de sistemas conceptuais mais antigos, e as razões que resultaram em novos modos de explicação podem ser reduzidas a contradições ou improbabilidades surgidas nas formas mais antigas de explicação." (Riemann, *Werke*, 521)

sistemática mas aberta, entre os estudos filosóficos da ciência e a própria filosofia, ciência e filosofia seriam capazes de satisfazer as suas *Bildungsauftrag*, as suas obrigações educacionais. Riemann tinha estudado intensivamente e extraído estes comentários de Herbart, como sabemos a partir do seu *Espólio* [Scholz 1982ª, p. 424 e ss.]. Isso parece ter-lhe dado uma espécie de espelho para a auto-reflexão sobre a tarefa e o método das matemáticas.

O trabalho matemático de Riemann está penetrado por uma tão profunda orientação conceptual que não pode ser melhor caracterizado do que como "estudo filosófico das matemáticas" no sentido herbartiano. E até se lança alguma luz sobre a relação entre matemáticas e ciências físicas, tais como vistas por Riemann, quando se substitui a matemática pela filosofia na rede herbartiana de comunicações das ciências e da filosofia. De facto, Riemann fez na sua lição inaugural o que os filósofos deviam fazer, de acordo com Herbart, com respeito às disciplinas científicas. Ele investigou o conceito central de variedade, que pode ser encontrado em diferentes ciências matemáticas e físicas, a fim de clarificar as ligações entre as suas diferentes especificações, dissolver possíveis contradições e construiu-o, a fim de assegurar a possibilidade de posteriores progressos no conhecimento científico.

Portanto, encontramos, uma vez mais, uma profunda convergência de ideias entre Herbart e Riemann a este nível metodológico, com referência à mais genérica descrição da tarefa da investigação matemática. Esta convergência conduz-nos à suposição de que Riemann, nas suas investigações matemáticas, tomou, para investigações científicas, orientações que foram desenvolvidas por Herbart, entre outros, a um nível filosófico, e as quais significam uma influência social e cultural mais ampla nas ciências e matemáticas na primeira metade do séc. XIX.

(Tradução de S. Varela Sousa)

Referências Bibliográficas

[Beltrami, Eugenio 1868a.] Saggio di interpretazione della Geometria non Euclidea. *Giornale di Mathematica* 6, 284-312. Opere 1, 374 - 405.
[Beltrami, Eugenio 1868b.] Teoria fundamentale degli spazi di curvatura costante. *Annali di Mathematica* (2) 2, 232-255. Opere 1, 262-280.
[Bollinger, Maja 1972.] Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffs. *Archive for History of Exact Sciences* 9, 94-170.
[Dieudonné, Jean 1974.] *Cours de géométrie algébrique,* t. 1. Paris: Presses Universitaires de France.
[Farwell, Ruth; Knee, Christopher 1990.] The missing link: Riemann's "Commentatio", differential geometry and topology. *Historia Mathematica* 17, 223-255.
[Gauss, Carl Friedrich 1828.] Disquisitiones generals circa superficies curvas. *Commentationes Societatis Gottingensis,* 99-146. Werke 4, 217-258. Trad. Alemã de A. Wangerin, Leipzig 1900.
[Gauss, Carl Friedrich 1831.] Theoria residuorum biquadraticorum, Comment. secund. *Göttingische gelehrte Anzeigen.* Werke 2 (1863), 169-178.
[Gray, Jeremy J. 1979.] *Ideas of Space. Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic.* Oxford: Clarendon. ^{2}1989.
[Gray, Jeremy J. 1989.] *Algebraic geometry in the late nineteenth century.* In [Rowe/McCleary 1989], 361-388.
[Herbart, Johann Friedrich 1807.] Über philosophisches Studium. Werke 2, 227-296.
[Herbart, Johann Friedrich 1825.] *Psychologie als Wissenschaft, Zweiter analvtischer Theil.,* Werke 6, 1-339.
[Herbart, Johann Friedrich, Werke.] *Sämtliche Werke in chronologischer Reihenfolge.* Hrs. K. Kehrbach; O. Flügel. Langensalza 1899-1912. Reimpresso por Allen: Scientia Verlag 1964.
[Johnson, Dale 1979/1981.] The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology, I, II. *Archive for History of Exact Sciences* 20 (1979), 97-188, 25 (1981), 85-267.
[Johnson, Dale 1987.] L. E. J. Brouwer's coming of age as a topologist. In: E. Phillips (ed.). *Studies in the History of Mathematics.* Mathematics Association of America, Studies in Mathematics 26, 61-97.
[Moore, Gregory H. 1989.] Towards a history of Cantor's continuum problem. In [Rowe/McCleary 1989, 79-121].
[Nowak, Gregory 1989.] Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic *a priori* status of geometry. In [Rowe/McCleary 1989, 17-48].
[Pont, Jean-Claude 1974.] *La topologie algébrique des origines a Poincaré.* Paris: Presses Universitaires de France.
[Riemann, Bernhard 1851.] Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. *Inauguraldissertation* Göttingen. Werke, 3-45.
[Riemann, Bernhard 1854.] Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Habilitationsvortrag Göttingen. *Göttinger Abhandlungen* 13 (1867). Werke, 272-287.
[Riemann, Bernhard 1857.] Theorie der abelschen Funktionen. *Journal für Mathematik* 54. Werke 86-144.
[Riemann, Bernhard 1861.] Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima Academia Parisiensi proposita: "Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini ...". *Werke,* 391-404.
[Riemann, Bernhard, Werke.] *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß.* Leipzig 1876, 2. erweiterte Aufl. 1892. Neudruck New York: Dover 1955. Neudruck Nendeln: Sändig 1978. Erweiterter Neudruck (Hrsg. Narasimhan) Berlin etc.: Springer 1990.

[Riemann, Bernhard, Nachlaß.] *Codex Ms Riemann*, map 16. Handschriftenabteilung, Universitätsbibliothek Göttingen.

[Rowe, David; McCleary, John 1989.] *The History of Modern Mathematics.* vol. 1. Boston etc.: Academic Press.

[Scholz, Erhard 1980.] *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*. Basel - Boston - Stuttgart: Birkhäuser.

[Scholz, Erhard 1982a.] Herbart's influence on Bernhard Riemann. *Historia Mathematica* 9, 423-440.

[Scholz, Erhard 1982b.] Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie. *Archive for History of Exact Sciences* 27, 213-282.

[Spivak, Michael 1970.] *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Vol. 2. Boston: Publish or Perish.